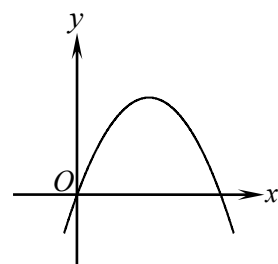


∞ 主題 14 三次函數及其圖形 ∞

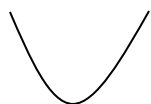
*1. 已知 $P(x) = -2x^3 + 18x^2 - 51x + 49 = -2(x-a)^3 + k(x-a) + l$ ，求 (a, k, l)

*7. 已知 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ，且圖形 $y = f(x)$ 有對稱中心 $(-2, 17)$ ，又將 $y = f(x)$ 適當平移之後可與圖形 $y = 2x^3 - 15x$ 重疊，試求實數 a, b, c, d 。

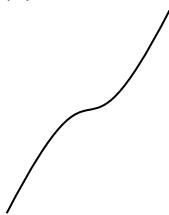
3. 已知二次函數 $y = ax^2 + bx$ 圖形如右，則下列哪一個選項最接近三次函數 $y = ax^3 + bx$ 的圖形？



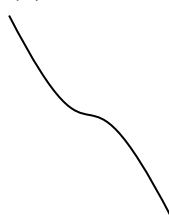
(1)



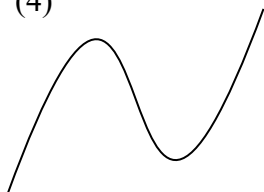
(2)



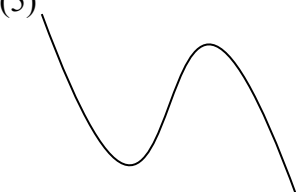
(3)



(4)



(5)



4. 下列哪一個函數圖形經過適當的平移後會跟 $f(x) = 3x^3 + 9x^2 + 10x + 9$ 的圖形完全重合？

(A) $y = 2x^3 + 8x^2 + 9x + 8$

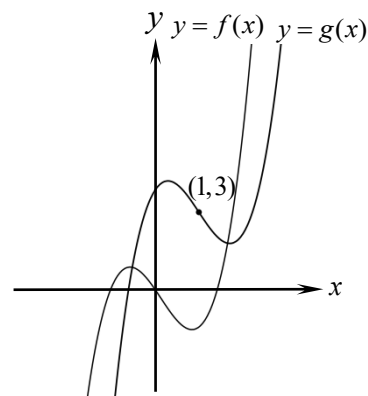
(B) $y = -3x^3 - 9x^2 - 10x - 9$

(C) $y = 3x^3 + x$

(D) $y = 3x^3 - 18x^2 + 37x - 10$

(E) $y = 3x^3 - 9x^2 + 11x$ 。

5. 已知三次函數 $f(x) = x^3 - 2x$ ，又 $y = g(x)$ 是由 $y = f(x)$ 平移而得，已知 $y = g(x)$ 對稱中心為 $(1, 3)$ ，求函數 $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 。



*6. 關於三次函數 $f(x) = 2(x-4)^3 + 5(x-4) + 7$ 之敘述，請選出下列何者正確：

(1) $f(-x) = f(x)$

(2) 點 $(4, 7)$ 是圖形 $y = f(x)$ 的對稱中心

(3) $f(x)$ 有最大值 7

(4) 圖形 $y = f(x)$ 在 $x = 4$ 附近的局部特徵近似於直線 $y = 5(x-4) + 7$

(5) 不論 a 為任何實數，直線 $y = a(x-5) + 7$ 與直線 $y = f(x)$ 恆有交點 。

7. 設三次函數 $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + cx + d$ ，其中 c, d 為實數，請選出下列正確的選項：

- (1) 可以找到一個實數 x_0 滿足 $f(x_0) = 10^5$
- (2) $y = f(x)$ 圖形與 x 軸可能沒有交點
- (3) $y = f(x)$ 圖形的對稱軸為直線 $x = \frac{2}{3}$
- (4) $y = f(x)$ 圖形的對稱中心為 $(\frac{4}{9}, f(\frac{4}{9}))$
- (5) $f(\frac{4}{9}) = \frac{1}{2}(f(\frac{1}{9}) + f(\frac{7}{9}))$ 。

*8. 平面上已知一個三次函數圖形 $y = x^3 - 9x^2 + 29x - 32$ ，試回答下列問題：

- (1) 求此三次函數圖形的對稱中心。
- (2) 有一直線 L 恰通過此三次函數的對稱中心，並與此三次函數交於三點，則此三點的 x 坐標總和為_____。

9. 已知三次多項式 $f(x)$ 滿足 $f(1-x) = -f(3+x)$ ，過 $(4, 10)$ 在圖形 $y = f(x)$ 上，試問下列哪些敘述為真？

- (1) $f(2) = 0$
- (2) $(3, 0)$ 為圖形 $y = f(x)$ 之對稱中心
- (3) $y = f(x)$ 圖形必過 $(0, -10)$
- (4) $y = f(x)$ 圖形領導係數必為正數
- (5) 若直線 $y = m(x-2)$ 與圖形 $y = f(x)$ 恰交相異三點 $(\alpha, f(\alpha)), (\beta, f(\beta)), (\gamma, f(\gamma))$ 且 $\alpha < \beta < \gamma$ ，則 α, β, γ 必成等差數列。

10. 平面上有一個三次函數圖形 $\Gamma: y = x^3 - 3x^2 + 4$ ，設直線 $L: y = m(x-1) + 2$ 與 Γ 交於 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ 三點，則 $x_1 + x_2 + x_3 + y_1 + y_2 + y_3 =$ _____。

11. 若點 (a, b) 在 $y = 2(x+1)^3 + 5(x+1) - 4$ 的圖形上，則點 $(a-6, b+7)$ 必會在哪一個函數圖形上？

(1) $y = 2(x-5)^3 + 5(x-5) - 11$

(2) $y = 2(x-5)^3 + 5(x-5) + 3$

(3) $y = 2(x+7)^3 + 5(x+7) - 11$

(4) $y = 2(x+7)^3 + 5(x+7) + 3$

(5) $y = 2(x-7)^3 + 5(x-7) + 11$ 。

*12. 設 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 的大域特徵近似於 $y = x^3$ ，對稱中心為 $(2, -16)$ ，且在對稱中心附近的局部特徵近似於 $y = -11x + 6$ ，則數序 $(a, b, c, d) =$ _____。

13. 已知三次函數 $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 滿足以下三條件：

- (1) 若 $f(\alpha) = \beta$ ，則 $f(-2 - \alpha) = 4 - \beta$ 恆成立。
 - (2) 存在水平直線與函數 $y = f(x)$ 的圖形有三個交點。
 - (3) a, d 為整數且 $ad = 3$
- 則 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

*14. 將 $y = (x-1)^3 + 4$ 的圖形向右移動 1 單位，則再經過下列的哪一種移動方式可以讓圖形不通過第四象限？

- (1) 向上移動 2 單位
- (2) 向下移動 2 單位
- (3) 向右移動 2 單位
- (4) 向上移動 4 單位
- (5) 向下移動 4 單位。

15. 已知 $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ ，試在 $x = 2$ 附近估計 $f(1.99)$ 並四捨五入至小數點第二位。

*16. 已知 $f(x) = -2x^3 + 2x^2 - 1$, $g(x) = -2x^3$, $h(x) = -2x^2 + 2x + 1$ ，試問下列選項何者正確？

- (1) $f(99^{10}) > 0$ (2) $g(-99^{10}) < 0$ (3) $\frac{f(99^{10})}{g(99^{10})} \approx -1$ (4) $\frac{f(99^{10})}{h(99^{10})} \approx 1$
(5) $f(99^{10}) < h(99^{10})$ 。

17. 設三次函數 $f(x)$ 的對稱中心為 $(2, -9)$ ，且 $f(x)$ 在 $x=0$ 附近的一次近似為 $22x - 21$ ，則 $f(3) =$ _____。

18. [111 學測 A]

給定一實係數三次多項式函數 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 3$ 。令 $g(x) = f(-x) - 3$ ，已知 $y = g(x)$ 圖形的對稱中心為 $(1, 0)$ 且 $g(-1) < 0$ 。試選出正確的選項。

- (1) $g(x) = 0$ 有三相異整數根
(2) $a < 0$
(3) $y = f(x)$ 圖形的對稱中心為 $(-1, -3)$
(4) $f(100) < 0$
(5) $y = f(x)$ 的圖形在點 $(-1, f(-1))$ 附近會近似於一條斜率為 a 的直線。

***19. [111 學測 B]**

設 $f(x) = 2x^3 - 3x + 1$ ，下列關於函數 $y = f(x)$ 的圖形之描述，試選出正確的選項。

- (1) $y = f(x)$ 的圖形通過點 $(1, 0)$
- (2) $y = f(x)$ 的圖形與 x 軸只有一個交點
- (3) 點 $(1, 0)$ 是 $y = f(x)$ 的圖形之對稱中心
- (4) $y = f(x)$ 的圖形在對稱中心附近會近似於一直線 $y = 3x - 3$
- (5) $y = 3x^3 - 6x^2 + 2x$ 的圖形可由 $y = f(x)$ 的圖形經適當平移得到。

***20.** 已知 $f(x)$ 為三次多項式函數且 $(x+2)f(x)$ 在 $x=1$ 附近的一次近似函數為 $y = 16x + 5$ ，試求 $f(x)$ 在 $x=1$ 附近的一次近似函數。

21. 已知 $f(x) = -2x^3 + 18x^2 - 51x + 49$ 在平面坐標上的圖形沿 x 軸方向向左平移 h 單位，再沿 y 軸方向向下平移 k 單位後，所得之新圖形自身對稱於原點，則 $(h, k) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

22. 已知三次函數 $f(x) = (x-99)^3 + 6(x-99)^2 + 8(x-99) + 1$ ，下列敘述哪些正確？
- (1) $f(x)$ 除以 $x-100$ 的餘式為 12
 - (2) $f(x)$ 在 $x=99$ 附近的一次近似為 $8(x-99)+1$
 - (3) $y=f(x)$ 的圖形對稱中心為 $(97,1)$
 - (4) 若 $a > b$ ，則 $f(a) > f(b)$
 - (5) $y=f(x)$ 的圖形可以經 $y=(x-101)^3 - 4(x-101) + 3$ 的圖形適當平移後得到。

23. 三次多項函數 $y=f(x)$ 的對稱中心為 (h,k) ，且 $y=f(x)$ 和直線 L 交於 $(1,24), (2,8), (6,-56)$ 三點，則 h 的值為_____。

24. [113 學測 A]

設 $a \in \{-6, -4, -2, 2, 4, 6\}$ ，已知 a 為實係數三次多項式 $f(x)$ 的最高次項係數，若函數 $y=f(x)$ 的圖形與 x 軸交於三點，且其 x 坐標成首項為 -7 、公差為 a 的等差數列。試問共有幾個 a 使得 $f(0) > 0$ ？

- (1) 1 個 (2) 2 個 (3) 3 個 (4) 4 個 (5) 5 個。

25. [114 學測 A]

已知實係數三次多項式 $f(x)$ 除以 $x+6$ 得商式 $q(x)$ 和餘式 3。若 $q(x)$ 在 $x=-6$ 有最大值 8，則 $y=f(x)$ 圖形的對稱中心坐標為_____。

簡 答

- | | | | |
|----------------------------|---------------|--------------|--------------------|
| 1. (3,3,4) | 2. (2,12,9,3) | 3. (5) | 4. (C)(D) |
| 5. $x^3 - 3x^2 + x + 4$ | 6. (2)(4)(5) | 7. (1)(4)(5) | 8. (1) (3,1) (2) 9 |
| 9. (1)(3)(5) | 10. 9 | 11. (4) | 12. (1, -6, 1, -2) |
| 13. $3x^3 + 9x^2 + 5x + 1$ | 14. (4) | 15. 2.93 | 16. (5) |
| 17. -9 | 18. (1)(2) | 19. (1) | 20. $3x + 4$ |
| 21. (3, 4) | 22. (2)(3)(5) | 23. 3 | 24. (1) |
| 25. (-6, 3) | | | |