

∞ 主題 10 算幾不等式 ∞

*1. 兩正數 a, b 滿足 $a^2 + b^2 = 4$ ，試求 $(a+b)^2$ 之最大值。

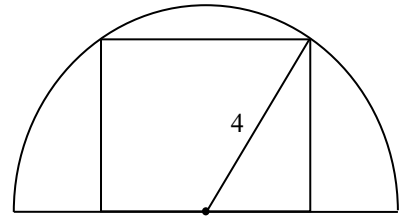
2. 設 x 為實數，試求 $y = 4x^2 + 2x + \frac{18}{2x^2 + x + 1}$ 的最小值。

*3. 欲使用鐵絲在河岸圍一矩形土地 (沿河岸的一邊不圍)，使其面積為 200 平方公尺，試問最少需要使用_____公尺的鐵絲。

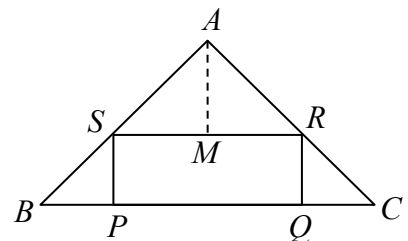
*4. 設 x, y 皆為正數，試求 $(x + \frac{1}{y})(y + \frac{1}{x})$ 的最小值。

5. 若已知長方體體積 27cm^3 ，試求其表面積最小值。

6. 如圖，半徑為 4 的半圓形場地，在其中要圍出一個最大的矩形花圃，試求其最大面積。



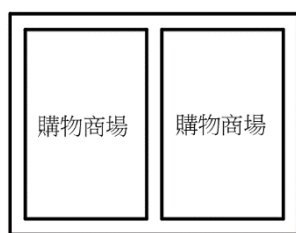
- *7. 如右圖所示， $PQRS$ 為一給定的矩形，其中長 $\overline{PQ} = 12$ ，寬 $\overline{QR} = 3$ 。而 $\triangle ABC$ 為等腰三角形，其中 $\overline{AB} = \overline{AC}$ ， P, Q 在 $\overline{BC}$ 邊上， R, S 分別在 $\overline{CA}, \overline{AB}$ 邊上， $\overline{QC} = x$ 。試回答下列問題：



- (1) $\triangle ASR$ 中， $\overline{SR}$ 邊上的高為 $\overline{AM}$ ，試以 x 表示 $\overline{AM}$ 。
- (2) 以 x 表示 $\triangle ABC$ 面積。
- (3) $\triangle ABC$ 面積最小值為何？

8. 已知 a, b 為正實數，且 $2a+3b=4$ ，求 $(a+3)(b+2)$ 的最大值為_____。

*9. 某建商依照設計圖興建了兩座形狀相同的矩形購物商場，如圖所示，兩商場的中間以及四周皆有寬度為3公尺的休閒步道，已知整塊矩形土地面積為5400平方公尺，則兩商場占地面積最大值為_____平方公尺。



*10. 下列哪些選項是正確的？

- (1) 設 x 為任意非 0 之實數，則 $x + \frac{1}{x} \geq 2$
- (2) 設 x 為任意非 0 之實數，則 $x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2$ 且 $x^2 + \frac{1}{x^2}$ 的最小值為 2
- (3) 設 x 為任意實數，則 $(x^2+1) + \frac{1}{(x^2+1)}$ 的最小值為 2
- (4) 設 x 為任意實數，則 $(x^2+2) + \frac{1}{(x^2+2)}$ 的最小值為 2
- (5) 設 x 為任意非 ± 1 之實數，則 $(x^2-1) + \frac{1}{(x^2-1)}$ 的最小值為 2。

11. 勘誤題： a, b 為正數，要求 $(a + \frac{1}{4b})(\frac{9}{a} + b)$ 之最小值。

步驟一：由算幾不等式： $\frac{a + \frac{1}{4b}}{2} \geq \sqrt{\frac{a}{4b}}$ 可得 $a + \frac{1}{4b} \geq 2\sqrt{\frac{a}{4b}}$

步驟二：由算幾不等式： $\frac{\frac{9}{a} + b}{2} \geq \sqrt{\frac{9b}{a}}$ 可得 $\frac{9}{a} + b \geq 2\sqrt{\frac{9b}{a}}$

步驟三：兩式相乘，得 $(a + \frac{1}{4b})(\frac{9}{a} + b) \geq 2\sqrt{\frac{a}{4b}} \times 2\sqrt{\frac{9b}{a}} = 6$

所以求得最小值為 6。

試判斷此作法是否正確並回答。如有錯誤，請寫出原因，並利用算幾不等式來找出正確的最小值。

***12. [99 指考甲]**

設 a 、 b 、 c 分別為函數 $f(x) = x + \frac{2}{x}$ 、 $g(x) = x^2 + \frac{2}{x^2}$ 、 $h(x) = \sqrt{x^2 + \frac{2}{x^2}}$ 在 x 為任意正實數時的最小值。試問下列哪些選項是正確的？

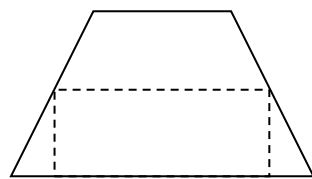
(1) $b = a^2$

(2) $c = 2^{\frac{3}{4}}$

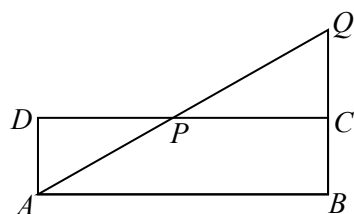
(3) $f(x) + g(x)$ 在 x 為任意正實數時的最小值為 $a + b$

(4) $g(x) + h(x)$ 在 x 為任意正實數時的最小值為 $b + c$ 。

13. 有一塊等腰梯形的空地，上底 50 公尺、下底 110 公尺、高 60 公尺，在內部闢一個長方形區域蓋房子(如圖)，請問房子最大面積為多少平方公尺？



14. 已知 $ABCD$ 為一個矩形，其中 $\overline{AB} = 20$, $\overline{BC} = 5$ 。若過 A 點作一直線交 $\overline{CD}$ 於 P 且與 $\overline{BC}$ 邊的延長線交於 Q 。則當 $\overline{DP}$ 長度為_____時， $\triangle ADP$ 與 $\triangle CPQ$ 之面積和為最小。



簡 答

- | | | | | |
|------------------|-----------------------|-------------------------------|------------|----------------------|
| 1. 8 | 2. 10 | 3. 40 | 4. 4 | 5. 54 cm^2 |
| 6. 16 | 7. (1) $\frac{18}{x}$ | (2) $36 + 3x + \frac{108}{x}$ | (3) 72 | 8. $\frac{32}{3}$ |
| 9. 4374 | 10. (2)(3) | 11. 此作法錯誤，見詳解 | 12. (2)(4) | 13. 3025 |
| 14. $10\sqrt{2}$ | | | | |