

∞ 主題 5 特殊方根的處理 ∞

*1. 滿足 $\sqrt{90x}$ 為正整數且 $1 \leq x \leq 100$ 的正整數 x 之值有_____個。

*2. 化簡 $\frac{1}{2-\sqrt{3}} - \frac{5\sqrt{2}}{1+\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} =$ _____。

3. $(\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \frac{3}{2\sqrt{2}+\sqrt{5}})^2$ 經化簡後可得結果為_____。

*4. 若 $x = \sqrt{7} + \sqrt{6}$, $y = \sqrt{6} - \sqrt{7}$, 則 $2x^2 + 3xy + 2y^2 =$ _____。

*5. 若 $\frac{1}{\sqrt{4-\sqrt{14}}} = \frac{\sqrt{b+c\sqrt{14}}}{a}$ ，求 $a+b+c$ 之值，其中 a, b, c 為最小正整數解。

6. 實數 a 滿足 $|1996-a| + \sqrt{a-1997} = a$ ，則 $a-1996^2$ 之值為_____。

7. 化簡 $\frac{12}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(分母不可含方根)

*8. 試化簡 $\frac{1}{1+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{23}+\sqrt{25}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

9. $a = \sqrt{5} + \sqrt{7} + \sqrt{11}$, $b = \sqrt{2} + \sqrt{7} + \sqrt{14}$, $c = \sqrt{2} + \sqrt{10} + \sqrt{11}$, 則 a, b, c 的大小關係為何?
(A) $a > b > c$ (B) $a > c > b$ (C) $b > c > a$ (D) $c > b > a$ (E) $c > a > b$ 。

*10. 請選出選項當中最大者：

- (1) $10 - 3\sqrt{11}$ (2) $51 - 10\sqrt{26}$ (3) $3\sqrt{11} - 10$ (4) $10\sqrt{26} - 51$ (5) $\sqrt{401} - 20$ 。

11. 已知 $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 則 $\frac{1-x}{1-\sqrt{1-x}} + \frac{1+x}{1+\sqrt{1+x}}$ 之值為_____。

12. 化簡 $\sqrt{(5+2\sqrt{6})^3} + \sqrt{(5-2\sqrt{6})^3}$ 可得下列選項中的哪個值？請選出來。

- (1) $13\sqrt{2}$ (2) $17\sqrt{3}$ (3) $17\sqrt{5}$ (4) $18\sqrt{3}$ (5) $18\sqrt{2}$ 。

*13. 比較下列各數中，何者最小？

(1) $\sqrt{400} + \sqrt{400}$ (2) $\sqrt{401} + \sqrt{399}$ (3) $\sqrt{402} + \sqrt{398}$ (4) $\sqrt{403} + \sqrt{397}$ 。

*14. 已知 $x = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$ ，則 $x^3 - \frac{1}{x^3} =$ _____ 。

15. [103 學測]

關於下列不等式，請選出正確的選項。

(1) $\sqrt{13} > 3.5$ (2) $\sqrt{13} < 3.6$ (3) $\sqrt{13} - \sqrt{3} > \sqrt{10}$
(4) $\sqrt{13} + \sqrt{3} > \sqrt{16}$ (5) $\frac{1}{\sqrt{13} - \sqrt{3}} > 0.6$ 。

16. 試將 $\frac{6}{\sqrt[3]{4}-1}$ 之分母有理化。

17. 試證明 $\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} < \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$ ，其中 n 為正整數。

*18. For how many real values of x is $\sqrt{101-\sqrt{x}}$ an integer?

*19. 若 $\sqrt{17+3\sqrt{32}}$ 的整數部分為 a ，小數部分為 b ，則 $\frac{4}{b} + \frac{1}{a+b} =$ _____。

20. 若 $\sqrt{11-\sqrt{72}}$ 的整數部分為 a ，小數部分為 b ，則 $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{5-b}$ 之值為_____。

*21. 設 $a = \sqrt{8+\sqrt{63}}$ 且 m, n 為正整數，試回答下列問題：

(1) 若 $m < a < m+1$ ，則 $m =$ _____。

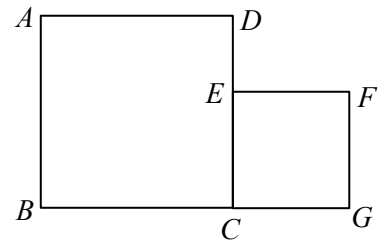
(2) 若 $n < a + \frac{1}{a} < n+1$ ，則 $n =$ _____。

22. [102 學測]

設 k 為一整數。已知 $\frac{k}{3} < \sqrt{31} < \frac{k+1}{3}$ ，則 $k =$ _____。

23. 設 n 為自然數，若 $\frac{n}{2} < \sqrt{8+5\sqrt{7}} < \frac{n+1}{2}$ ，則 n 為_____。

24. 如右圖， $ABCD$ 與 $CEFG$ 是兩個併排的正方形，其中 $ABCD$ 的面積為 $4+\sqrt{12}$ ， $CEFG$ 的面積是 $19-8\sqrt{3}$ ，若三角形 ABG 的面積為 $a+b\sqrt{3}$ 且 a, b 皆為有理數，則 $a+b=$ _____。



25. 化簡 $\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$ 。

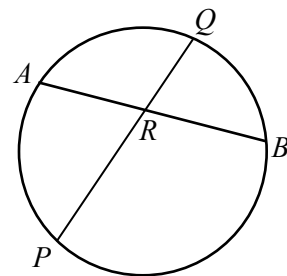
26. 已知 $\sqrt{8+\sqrt{40+8\sqrt{5}}} + \sqrt{8-\sqrt{40+8\sqrt{5}}} = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ 且 α, β 皆為正整數 ($\alpha > \beta$)，求 α, β 。

- *27. 已知 n 為正整數，且 $\frac{10n+4}{n+1} < \sqrt{97} < \frac{10n+14}{n+2}$ ，則 $n=$ _____。

28. 已知 n 為正整數且 $\sqrt{n} < \sqrt{4+\sqrt{7}} + \sqrt{4-\sqrt{7}} < \sqrt{n+2}$ ，則 $n =$ _____。

29. 若 x 為正實數，試解 x 的方程式 $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} = 1$ 。

30. 有一圓如右圖，圓上有兩弦 $\overline{AB}$, $\overline{PQ}$ 交於 R 點，已知 $\overline{AR} = \overline{BR}$, $\overline{PR} = 1$, $\overline{PQ} = 4 - \sqrt{5}$ ，若 $\overline{AB}$ 長為 $\sqrt{a} - \sqrt{2}$ 且 a 為正整數，則 a 值為_____。



簡 答

- | | | | | |
|---|--|-----------------|--------------------|------------|
| 1. 3 | 2. 2 | 3. 2 | 4. 49 | 5. 12 |
| 6. 1997 | 7. $2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} - \sqrt{30}$ | 8. 2 | 9. (B) | 10. (1) |
| 11. 1 | 12. (4) | 13. (4) | 14. $126\sqrt{15}$ | 15. (1)(4) |
| 16. $2(2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} + 1)$ | | 17. (1) 略 (2) 4 | 18. 11 | 19. 5 |
| 20. $\frac{6}{7}$ | 21. (1) 3 (2) 4 | 22. 16 | 23. 9 | 24. 5 |
| 25. 1 | 26. $\alpha = 10, \beta = 2$ | 27. 38 | 28. 13 | 29. 2 或 10 |
| 30. 10 | | | | |