

主題 18 分式不等式

1. 下列敘述哪些是正確的？

LHKMK



- (A) 不等式 $(x-1)(x-2) > 0$ 與不等式 $\frac{x-1}{x-2} > 0$ 有相同的解
- (B) 不等式 $x^2 + x + 1 > 0$ 與不等式 $x^3 - 1 > x - 1$ 有相同的解
- (C) 不等式 $x^2 + 2x + 2 < 0$ 的解為 $-1-i < x < -1+i$ 有相同的解
- (D) 不等式 $\frac{x}{x^2 - 2x + 3} < 2$ 與不等式 $2x^2 - 5x + 6 > 0$ 有相同的解
- (E) 不等式 $\frac{x-3}{x+2} \leq 0$ 與不等式 $(x+2)(x-3)^3 \leq 0$ 有相同的解

2. 下列敘述哪些是正確的？

TUJS



- (A) 不等式 $2x^2 + x + 1 > 0$ 和 $x^2 - 4x + 10 \geq 0$ 的解相同
- (B) 不等式 $(x^2 + 2)(x-3)(x-1)^2 > 0$ 和 $(x-3)^3(x-1)^4 > 0$ 的解相同
- (C) 不等式 $\frac{(x^2+1)(x-2)(x-3)}{(x-1)^2} \geq 0$ 和 $(x^2-1)(x-2)(x-3)(x-1)^2 \geq 0$ 的解相同
- (D) 不等式 $\frac{3x^2+7x-1}{2x^2+x+2} \geq 1$ 和 $3x^2+7x-1 \geq 2x^2+x+2$ 的解相同
- (E) 不等式 $\frac{x^2-3x+1}{x+2} \geq 1$ 和 $x^2-3x+1 \geq x+2$ 的解相同

1. 【答】 : (A)(D)

【解】 : (A) $(x-1)(x-2) > 0$ 與 $\frac{x-1}{x-2} > 0$ 為同義不等式，有相同的解。

(B) $x^3 - 1 > x - 1 \Rightarrow x^3 - x > 0 \Rightarrow x(x-1)(x+1) > 0 \Rightarrow x > 1$ 或 $0 < x < 1$

但 $x^2 + x + 1 > 0 \Rightarrow x \in R$,

故 $x^3 - 1 > x - 1$ 與 $x^2 + x + 1 > 0$ 沒有相同解

(C) $\underbrace{x^2 + 2x + 2}_{\Delta < 0, \text{恆正}} < 0 \Rightarrow x$ 無解

(D) $\frac{x}{\underbrace{x^2 - 2x + 3}_{\Delta < 0, \text{恆正}}} < 2 \Rightarrow x < 2x^2 - 4x + 6 \Rightarrow 2x^2 - 5x + 6 > 0$, 正確

(E) $\frac{x-3}{x+2} \leq 0 \Rightarrow (x-3)(x+2) < 0$ 或 $x = 3$

$\Rightarrow -2 < x < 3$ 或 $x = 3 \Rightarrow -2 < x \leq 3$

$(x+2)(x-3)^3 \leq 0 \Rightarrow (x+2)(x-3) \leq 0 \Rightarrow -2 \leq x \leq 3$

2. 【答】 : (A)(B)(D)

【解】 : (A) $2x^2 + x + 1 > 0 \Rightarrow D < 0$ 故 $x \in R$

$x^2 - 4x + 10 \geq 0 \Rightarrow (x-2)^2 + 6 \geq 0$ 故 $x \in R$

(B) 前式: $x^2 + 2 > 0 \Rightarrow$ 解為 $x > 3$

後式: $x > 3$

(C) 若 $x = 1$ 則不合

(D) $2x^2 + x + 2$ 恆正, 解相同

(E) $x \leq 2$ 時不合

3. 設 $f(x) = (x-1)(x^2+2x-3)$ ，下列哪些不等式與 $f(x) \leq 0$ 有相同解？

(A) $(x-1)(x^2+2x-3)(x^2+2) \leq 0$

(B) $\frac{(x-1)}{(x^2+2x-3)} \leq 0$

(C) $(x-1)^{12}(x^2+2x-3)^{45} \leq 0$

(D) $(1-x)^2(x+3) \leq 0$

(E) $\frac{(x-1)(x^2+2x-3)}{x^2+x+1} \leq 0$

PBJYU



4. 分式不等式 $\frac{x^2+2x-3}{x^2+x-2} \leq 1$ 之解為_____

MEIRQ



5. 小將在不等式單元的練習中，有一分析過程如右，

已知 4 個步驟中有一計算欠周詳：

(1) 挑選並說明小將

開始錯誤的步驟及原因。

(2) 重新計算並修正不等式

$\frac{x^2-3}{x} \geq 2$ 的解。

題： $\frac{x^2-3}{x} \geq 2$

解：①不等式兩邊乘 x 得 $x^2-3 \geq 2x$

②移項整理得 $x^2-2x-3 \geq 0$

③因式分解得 $(x-3)(x+1) \geq 0$

④故當 $x \geq 3$ 或 $x \leq -1$ 時，原式成立

NYQPZ



3. 【答】 : (A)(D)(E)

【解】 : $f(x) = (x-1)(x^2 + 2x - 3) \leq 0$

$$\Rightarrow f(x) = (x-1)(x+3)(x-1) \leq 0$$

$$\Rightarrow x \leq -3 \text{ 或 } x = 1$$

$$(A)(x-1)(x^2 + 2x - 3)(x^2 + 2) \leq 0 \Rightarrow x \leq -3 \text{ 或 } x = 1$$

$$(B)x^2 + 2x - 3 \neq 0, x \neq 1 \text{ 或 } -3 \Rightarrow x < -3$$

$$(C)(x-1)^{12}(x^2 + 2x - 3)^{45} \leq 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 \leq 0 \text{ 或 } x = 1 \Rightarrow -3 \leq x \leq 1$$

$$(D)(1-x)^2(x+3) \leq 0 \Rightarrow x \leq -3 \text{ 或 } x = 1$$

$$(E) \frac{(x-1)(x^2 + 2x - 3)}{\underbrace{x^2 + x + 1}_{\text{恆正}}} \leq 0 \Rightarrow (x-1)(x^2 + 2x - 3)(x^2 + x + 1) \leq 0$$

$$\Rightarrow x \leq -3 \text{ 或 } x = 1$$

4. 【答】 : $x < -2$

【解】 : $\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + x - 2} \leq 1 \Rightarrow \frac{x^2 + 2x - 3 - (x^2 + x - 2)}{x^2 + x - 2} \leq 0$

$$\Rightarrow (x-1)(x^2 + x - 2) \leq 0$$

$$\Rightarrow (x-1)^2(x+2) \leq 0 \text{ 又分母 } \neq 0$$

$$\Rightarrow x < -2$$

5. 【答】 : (1)見詳解 (2) $-1 \leq x < 0$ 或 $x \geq 3$

【解】 : (1)第①步驟欠周詳

因為無法確定 x 為正或負，

兩邊同乘 x 無法確定是否變號

$$(2) \frac{x^2 - 3}{x} \geq 2 \Rightarrow \frac{x^2 - 3}{x} - 2 \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 2x - 3}{x} \geq 0$$

$$\Rightarrow (x^2 - 2x - 3) \cdot x \geq 0 \text{ 且 } x \neq 0 \Rightarrow x(x+1)(x-3) \geq 0 \text{ 且 } x \neq 0$$

$$\Rightarrow -1 \leq x < 0 \text{ 或 } x \geq 3$$

6. 求不等式 $\frac{x-1}{(x-3)(x+2)} \geq \frac{x-3}{x+2}$ 的解為 _____。



7. 若「 x 為整數」，則滿足不等式： $\frac{(x-8)^4(x+1)^3(x-5)(x+5)}{(x+3)} \leq 0$
的 x 共有 _____ 個。



8. 若二次不等式 $ax^2 + bx + c < 0$ 之解為 $-2 < x < 5$ ，則 $\frac{cx+2a}{ax+b} \geq 0$ 之解
為 _____



6. 【答】 : $3 < x \leq 5$ 或 $-2 < x \leq 2$

$$\begin{aligned}\text{【解】 : 原式} &\Rightarrow \frac{(x^2 - 6x + 9) - (x - 1)}{(x - 3)(x + 2)} \leq 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} (x + 2)(x - 3)(x^2 - 7x + 10) \leq 0 \\ x \neq 3, -2 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} (x + 2)(x - 3)(x - 2)(x - 5) \leq 0 \\ x \neq 3, -2 \end{cases} \\ &\Rightarrow 3 < x \leq 5 \text{ 或 } -2 < x \leq 2\end{aligned}$$

7. 【答】 : 10

$$\begin{aligned}\text{【解】 : 原式} &\Rightarrow \begin{cases} (x - 8)^4(x + 1)^3(x - 5)(x + 5)(x + 3) \leq 0 \\ x \neq -3 \end{cases} \\ &\Rightarrow -1 \leq x \leq 5, -5 \leq x < -3, x = 8 \\ &\therefore x \text{ 為整數} \Rightarrow \text{共 10 個}\end{aligned}$$

8. 【答】 : $\frac{1}{5} \leq x < 3$

$$\begin{aligned}\text{【解】 : } &-2 < x < 5 \Rightarrow t(x + 2)(x - 5) < 0, t > 0 \\ &\Rightarrow tx^2 - 3tx - 10t < 0 \Rightarrow \text{以 } a = t, b = -3t, c = -10t \\ &\text{代入得 } \frac{-10tx + 2t}{tx - 3t} \geq 0 \Rightarrow (5x - 1)(x - 3) \leq 0 \text{ 且 } x \neq 3 \\ &\Rightarrow \frac{1}{5} \leq x < 3\end{aligned}$$