

主題 4 綜合除法與多項式變形

1. $f(x) = 81x^4 - 162x^3 + 135x^2 - 60x + 15$
 $= a(3x-1)^4 + b(3x-1)^3 + c(3x-1)^2 + d(3x-1) + e$
試求 $a+b+c+d+e$ 之值為 _____。



2. 求 $3\left(\frac{-1+2\sqrt{7}}{3}\right)^4 + 2\left(\frac{-1+2\sqrt{7}}{3}\right)^3 - 12\left(\frac{-1+2\sqrt{7}}{3}\right)^2 - 5\left(\frac{-1+2\sqrt{7}}{3}\right) + 8$
之值為 _____。



1.【答】 :3

$$\text{【解】 : } f\left(\frac{2}{3}\right) = a + b + c + d + e = 81 \times \frac{16}{81} - 162 \times \frac{8}{27} + 135 \times \frac{4}{9} - 60 \times \frac{2}{3} + 15 = 3$$

2.【答】 : $-2\sqrt{7}$

$$\text{【解】 : 令 } f(x) = 3x^4 + 2x^3 - 12x^2 - 5x + 8$$

$$x = \frac{-1+2\sqrt{7}}{3} \Rightarrow (3x+1)^2 = 28 \Rightarrow 9x^2 + 6x - 27 = 0 \Rightarrow 3x^2 + 2x - 9 = 0$$

$$f(x) = (3x^2 + 2x - 9)(x^2 - 1) - 3x - 1$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{-1+2\sqrt{7}}{3}\right) = -(-1+2\sqrt{7}) - 1 = -2\sqrt{7}$$

3. 已知 $f(x) = 2x^3 - 4x^2 - 3x + 7$ ，若將其表示成以下的形式：

$$f(x) = a(x-2)^3 + b(x-2)^2 + c(x-2) + d$$

(1) 求實數 a, b, c, d 的值。

(2) 求 $f(2.01)$ 的近似值到小數點以下第二位。(請在第三位四捨五入)



4. 設多項式 $f(x) = x^4 + x^3 - x^2 + 11x - 3$ ，則 $f(-1 + \sqrt{3})$ 之值 = _____。



3.【答】：(1) $a=2, b=8, c=5, d=1$ (2) 1.05

【解】：(1)

$$\begin{array}{r|rrrr}
 2 & -4 & -3 & 7 & \\
 & 4 & 0 & -6 & 2 \\
 \hline
 2 & 0 & -3 & 1 & \\
 & 4 & 8 & & \\
 \hline
 2 & 4 & & 5 & \\
 & 4 & & & \\
 \hline
 2 & & & 8 &
 \end{array} \Rightarrow a=2, b=8, c=5, d=1$$

$$(2) f(2.01) = 2(0.01)^3 + 8 \times (0.01)^2 + 5 \times (0.01) + 1 \doteq 1.05$$

4.【答】： $3\sqrt{3}$

【解】： $x = -1 + \sqrt{3} \Rightarrow x^2 + 2x - 2 = 0$

$$\Rightarrow x^4 + x^3 - x^2 + 11x - 3 = (x^2 + 2x - 2)(x^2 - x + 3) + 3x + 3$$

$$\Rightarrow f(-1 + \sqrt{3}) = 3(-1 + \sqrt{3}) + 3 = 3\sqrt{3}$$