

主題 8 算幾不等式 $A \geq G$

⊙基礎精選⊙

1. 觀念是非題：

() 若 a, b 均為大於 0 的實數，則 $\frac{a-2}{b} + \frac{b}{a-2}$ 的最小值為 2。



2. 若 a, b 均大於 0，試求 $(a+4b)(\frac{9}{a} + \frac{1}{b})$ 的最小值為 _____。



3. 現有一長為 $20m$ 的鐵絲，將此鐵絲折成一個矩形，試問此矩形面積的最大值與此時的長與寬？



1.【答】：×

【解】：反例：取 $a=1, b=1$ 則 $\frac{1-2}{1} + \frac{1}{1-2} = -2 < 2$

2.【答】：25

【解】： $(a+4b)(\frac{9}{a} + \frac{1}{b}) = 13 + \frac{a}{b} + \frac{36b}{a} \geq 13 + 2 \cdot \sqrt{\frac{a}{b} \times \frac{36b}{a}} = 25$

3.【答】：面積 $25m^2$ ，長 $5m$ ，寬 $5m$

【解】：設長 x ，寬 $y \Rightarrow 2(x+y) = 20 \Rightarrow x+y = 10 \ (x > 0, y > 0)$

利用算幾不等式 $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \Rightarrow xy \leq 25$

$\Rightarrow xy$ 最大值 = 25

等號成立於 $x = y = 5$

4. 兩正數 a, b 滿足 $a^2 + 4b^2 = 8$ ，則 ab 之最大值為 _____。



5. 若函數 $f(x) = \frac{x^2 + 6x + 8}{x}$, $x > 0$ ，在 $x = a$ 時產生最小值 b ，求數對 $(a, b) =$ _____。



6. 阿花要用鐵絲網在河岸邊圍出一塊的長方形花圃(靠河的一邊不需使用鐵絲網，以 Γ 字型方式圍出長方形)，若花圃面積為 512 平方公尺，則至少要 _____ 公尺的鐵絲網。



4.【答】:2

【解】:由算幾不等式可得

$$\frac{a^2 + 4b^2}{2} \geq \sqrt{a^2 \cdot 4b^2} \Rightarrow 4 \geq 2ab \Rightarrow ab \leq 2$$

$\therefore$ 最大值為 2

5.【答】 : $(2\sqrt{2}, 4\sqrt{2} + 6)$

$$\text{【解】 : } f(x) = \frac{x^2 + 6x + 8}{x} = x + \frac{8}{x} + 6 \geq 2\sqrt{x \times \frac{8}{x}} + 6 = 4\sqrt{2} + 6$$

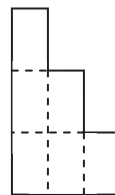
當極值發生時, $x = \frac{8}{x} \Rightarrow x = 2\sqrt{2}$ (取正)

6.【答】 : 64

【解】 : 設長 a , 寬 $b \Rightarrow ab = 512$

所求為 $a + 2b \geq 2\sqrt{2ab} \Rightarrow a + 2b \geq 64$

7. 小芬想用鐵絲圍出如圖的一塊鋸齒形狀的區域，
且此區域若按照虛線可分為面積相等的六塊長方形，
但小芬只有 60 公分的鐵絲可用，請問可以圍出最大的
面積是_____平方公分。



8. 請同學仔細閱讀後並回答下述問題：

某日，老師出了一個證明題，題目如下：

已知 $a, b, c \in R$ ，試證明 $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ 。

收卷之後，老師發現某同學的作答方式如下：

$$\text{根據算幾不等式：}\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \sqrt{a^2 b^2} = ab \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab$$

故可得： $a^2 + b^2 \geq 2ab$ ，同理可得： $b^2 + c^2 \geq 2bc$ ， $c^2 + a^2 \geq 2ca$

將上述三式相加可得： $2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2bc + 2ca$

$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ 故得證

- (1) 此證明不正確，試說出哪裡有錯？
(2) 此不等式該如何證明？(可修正以上證法或利用自己的方法證明)



7.【答】：150

【解】：設長方形的寬為 x ，長為 $y \Rightarrow 6x + 6y = 60$

由算幾不等式： $\frac{6x+6y}{2} \geq \sqrt{6x \times 6y} \Rightarrow \sqrt{xy} \leq 5 \Rightarrow xy \leq 25$

所求為 $6xy \leq 150$ ，故最大面積為 150

8.【答】：如下

【解】：(1) $\frac{a^2+b^2}{2} \geq \sqrt{a^2b^2} = |ab|$ (原式未加絕對值)

(2) 修改：根據算幾不等式：

$$\frac{a^2+b^2}{2} \geq \sqrt{a^2b^2} = |ab| \geq ab \Rightarrow a^2+b^2 \geq 2ab \text{ (等號依然成立)}$$

故可得： $a^2+b^2 \geq 2ab$ ，同理可得： $b^2+c^2 \geq 2bc$ ， $c^2+a^2 \geq 2ca$

將上述三式相加可得： $2a^2+2b^2+2c^2 \geq 2ab+2bc+2ca$

$\Rightarrow a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$ 故得證

$$\text{另解：} a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca = \frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$$

$$= \frac{1}{2}[(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)]$$

$$= \frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2] \geq 0$$

$$\Rightarrow a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$$

★能力進階★

1. 若 x 為非零實數，且 $k = x + \frac{1}{x}$ ，試求 k 的範圍。



2. 設 $ab > 0$ ， $p = \frac{a+b}{2}$ ， $q = \sqrt{ab}$ ， $r = \frac{2ab}{a+b}$ ， $s = \frac{ab}{a+b}$ ，則下列敘述

何者為真？

- (A) 若 a, b 同為正數，則 $p \geq r$ 恆成立
- (B) 若 a, b 同為正數時， $p \geq q$ 恆成立
- (C) $q \geq r$ 恆成立
- (D) 當 a, b 同為負數時， $p = s$ 可能成立
- (E) 當 a, b 同為負數時，四數之大小關係為 $q > s > p > r$



1.【答】： $k \geq 2$ 或 $k \leq -2$

【解】：1° 若 $x > 0$ ，由算幾不等式 $\Rightarrow \frac{x + \frac{1}{x}}{2} \geq \sqrt{x \times \frac{1}{x}} \Rightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2$

2° 若 $x < 0$ ，令 $t = -x > 0$

由算幾不等式 $t + \frac{1}{t} \geq 2 \Rightarrow -x + \frac{1}{-x} \geq 2 \Rightarrow x + \frac{1}{x} \leq -2$

$\therefore$ 由 1°, 2° 討論可得 $k \geq 2$ 或 $k \leq -2$

2.【答】：(A)(B)(C)

【解】：(A) $p - r = \frac{a+b}{2} - \frac{2ab}{a+b} = \frac{(a+b)^2 - 4ab}{2(a+b)} = \frac{(a-b)^2}{2(a+b)} \geq 0 \dots (\circ)$

(B) 當 $a, b \in R^+$ ，算幾不等式 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 恆成立 $\dots (\circ)$

(C) ① 當 $a, b > 0$ ， $\sqrt{ab} - \frac{2ab}{a+b} = \frac{\sqrt{ab}(a+b) - 2ab}{a+b} = \frac{\sqrt{ab}(a+b-2\sqrt{ab})}{a+b}$
 $= \frac{\sqrt{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{a+b} \geq 0$ 故 $\sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$

② 當 $a, b < 0$ ， $\sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$ 成立 ($\because a+b < 0$) $\dots (\circ)$

(D) 假設 $p = s \Rightarrow \frac{a+b}{2} = \frac{ab}{a+b} \Rightarrow (a+b)^2 = 2ab \Rightarrow a^2 + b^2 = 0$

$\because a, b < 0 \therefore$ 不成立 $\dots (\times)$

(E) $q > 0; p, r, s < 0$

① $q > s$ 成立

② $s - p = \frac{ab}{a+b} - \frac{a+b}{2} = \frac{2ab - (a+b)^2}{2(a+b)} = \frac{-a^2 - b^2}{2(a+b)} > 0 \Rightarrow s > p$

③ $p - r = \frac{a+b}{2} - \frac{2ab}{a+b} = \frac{(a+b)^2 - 4ab}{2(a+b)} = \frac{(a-b)^2}{2(a+b)} < 0 \Rightarrow p < r$

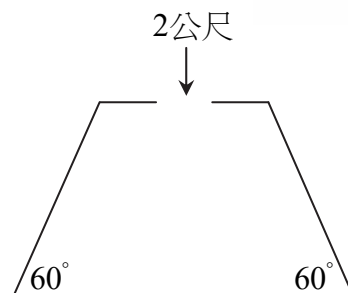
④ $s = \frac{ab}{a+b} > \frac{2ab}{a+b} = r \therefore q > s > r > p \dots (\times)$

選 (A)(B)(C)

3. 設 x 為正實數，則當 $x = \alpha$ 時， $x^2 - x + \frac{16}{x^2 - x + 2}$ 有最小值 m ，
則數對 $(\alpha, m) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



4. 一農夫想用 70 公尺長之竹籬圍成一底角為 60° 的等腰梯形菜園，
並在其中上底正中央留著寬 2 公尺的出入口，如圖所示。問此農
夫所能圍成的最大面積為 平方公尺。



3.【答】：(2,6)

【解】：原求值式： $x^2 - x + \frac{16}{x^2 - x + 2} = x^2 - x + 2 + \frac{16}{x^2 - x + 2} - 2$

$$\left(\begin{array}{l} \because x^2 - x + 2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \geq 0 \\ \therefore \text{符合算幾不等式適用條件} \end{array} \right)$$

$$\geq 2\sqrt{(x^2 - x + 2) \times \frac{16}{x^2 - x + 2}} - 2 = 6$$

等號成立時，該求值式有最小值 6

$$\text{此時 } x^2 - x + 2 = \frac{16}{x^2 - x + 2} \Rightarrow (x^2 - x + 2)^2 = 16 \Rightarrow x^2 - x + 2 = 4$$

$$\Rightarrow x = 2 \text{ 或 } -1 \text{ (不合)}$$

$$\text{故 } (\alpha, m) = (2, 6)$$

4.【答】： $162\sqrt{3}$

【解】：1° 如圖所示，設 $\overline{AB} = \overline{EF} = 2x$ ， $\overline{BC} = \overline{DE} = x$ ， $\overline{AF} = \overline{CD} = y$

$$\text{由竹籬總長 70 公尺得 } 2x + 2x + x + x + 2y - 2 = 70 \Rightarrow 3x + y = 36$$

$$2^\circ \text{ 梯形面積為 } \frac{(y + 2x + y) \cdot \sqrt{3}x}{2} = \sqrt{3}x(x + y)$$

3° 根據算幾不等式

$$\frac{2x + (x + y)}{2} \geq \sqrt{2x(x + y)} \Rightarrow x(x + y) \leq 162$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}x(x + y) \leq 162\sqrt{3}$$

$\therefore$ 面積最大為 $162\sqrt{3}$

