

數與數線

主題 2 有理數

◎基礎精選◎

1. 觀念是非題：

- (1) () 所謂稠密性為：任意兩個相異整數間至少存在一個整數。
- (2) () 循環小數 $0.5\overline{43}$ 不是有理數。



2. 下列何者可化為有限小數？

- (A) $\frac{283}{350}$ (B) $\frac{63}{128}$ (C) $\frac{147}{168 \times 125}$ (D) $\frac{149}{21 \times 40}$ (E) $\frac{56}{25^9}$



1.【答】：(1)× (2)×

【解】：(1) 有理數稠密性：任意兩個相異的有理數之間至少存在一個有理數
實數稠密性：任意兩個相異的實數之間至少存在一個實數
整數並沒有稠密性

$$(2) \text{ 循環小數可轉換為有理數 } 0.\overline{543} = \frac{543-5}{990} = \frac{538}{990}$$

2.【答】：(B)(C)(E)

【解】：若 $\frac{b}{a}$ 為有限小數 $(a, b) = 1, a, b \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow a$ 之質因數只含 2 或 5

$$(A) \frac{283}{350} = \frac{283}{2 \cdot 5^2 \cdot 7}$$

$$(B) \frac{63}{128} = \frac{63}{2^7}$$

$$(C) \frac{147}{168 \times 125} = \frac{7}{8 \cdot 125} = \frac{7}{2^3 \cdot 5^3}$$

$$(D) \frac{149}{21 \times 40} = \frac{149}{2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}$$

$$(E) \frac{56}{25^9} = \frac{56}{5^{18}}$$

3. 下列有關循環小數的敘述，請選出正確的選項：

(A) $0.\bar{3} + 0.\bar{4} = 0.\bar{7}$

(B) $0.\bar{7} + 0.\bar{3} = 1$

(C) $0.\bar{5} + 0.\bar{5} = 1.\bar{1}$

(D) $0.\bar{7} + 0.\bar{3} = 0.\bar{4} + 0.\bar{6}$

(E) $0.4\bar{9} = 0.5$



[數位延伸]

4. $2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5}} = \frac{17}{6}$ ，稱 $\langle 2, 1, 5 \rangle$ 為 $\frac{17}{6}$ 之連分數表示法，則 $\frac{3431}{2397}$

之連分數表示法為 _____



3.【答】：(A)(C)(D)(E)

【解】：(A) $0.\bar{3} + 0.\bar{4} = \frac{3}{9} + \frac{4}{9} = \frac{7}{9} = 0.\bar{7}$

(B) $0.\bar{7} + 0.\bar{3} = \frac{7+3}{9} > 1$

(C) $0.\bar{5} + 0.\bar{5} = \frac{10}{9} = 1.\bar{1}$

(D) $0.\bar{7} + 0.\bar{3} = \frac{7+3}{9} = \frac{4+6}{9} = 0.\bar{4} + 0.\bar{6}$

(E) $0.4\bar{9} = 0.4 + 0.0\bar{9} = 0.4 + \frac{9}{90} = 0.5$

4.【答】：<1, 2, 3, 7>

【解】： $\frac{3431}{2397} = 1 + \frac{1034}{2397} = 1 + \frac{1}{\frac{2397}{1034}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{329}{1034}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{47}{329}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{7}}}$

故 $\frac{3431}{2397}$ 的連分數表示法為 <1, 2, 3, 7>

5. 已知 $9900 = 4950 \times 2$ 。將分數 $\frac{2357}{4950}$ 化成小數時，小數點後第 103 位數字為 _____。



[數位延伸]

6. $a, b, c \in Z$ 且 $|a-1| + 2|b-2| + 3|a-c| = 2$ ，求數對 (a, b, c) 有 _____ 組解。



5.【答】: 6

【解】: $\frac{2357}{4950} = \frac{4714}{9900} = 0.47\overline{61} \quad \therefore (103-2) \div 2 \dots 1 \Rightarrow \text{數字為 } 6$

6.【答】: 4

【解】:

$$\textcircled{1} \begin{cases} |a-1|=0 \\ |b-2|=1 \\ |a-c|=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=c=1 \\ b=1, 3 \end{cases} \Rightarrow 2 \text{ 組}$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} |a-1|=2 \\ |b-2|=0 \\ |a-c|=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=c=-1, 3 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow 2 \text{ 組} \quad \therefore \text{共 } 4 \text{ 組}$$

★能力進階★

HILJY



1. a 、 b 均為自然數，有一最簡分數 $\frac{b}{a}$ ， $\frac{b}{a}$ 與 $\frac{b+1}{a+1}$ 相差 $\frac{1}{28}$ 且 $\frac{b}{a}$

與 $\frac{b-1}{a-1}$ 相差 $\frac{1}{21}$ ，則 $\frac{b}{a} = ?$

2. 已知 a 為整數，若 $\frac{1}{3} \leq \frac{12}{a} \leq \frac{1}{2}$ ，且 $\frac{12}{a}$ 可化為有限小數，則符合條件的 a 值有幾個？

- (1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4 (5) 5

1.【答】： $\frac{5}{7}$ 或 $\frac{9}{7}$

【解】：(1) 若 $\frac{b}{a}$ 為真分數 $\Rightarrow \frac{b-1}{a-1} < \frac{b}{a} < \frac{b+1}{a+1}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{b+1}{a+1} - \frac{b}{a} = \frac{1}{28} \\ \frac{b}{a} - \frac{b-1}{a-1} = \frac{1}{21} \end{cases} \xrightarrow{\text{通分}} \begin{cases} \frac{ab+a-ab-b}{(a+1)a} = \frac{1}{28} \\ \frac{ab-b-ab+a}{(a-1)a} = \frac{1}{21} \end{cases} \quad \text{兩式相除}$$

$$\Rightarrow \frac{a-1}{a+1} = \frac{21}{28} = \frac{3}{4} \Rightarrow 3a+3=4a-4 \Rightarrow a=7$$

$$\text{代回可得} \begin{cases} a=7 \\ b=5 \end{cases}$$

(2) 若 $\frac{b}{a}$ 為假分數 $\Rightarrow \frac{b+1}{a+1} < \frac{b}{a} < \frac{b-1}{a-1}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{b-1}{a-1} - \frac{b}{a} = \frac{1}{21} \\ \frac{b}{a} - \frac{b+1}{a+1} = \frac{1}{28} \end{cases} \xrightarrow{\text{通分}} \begin{cases} \frac{ab-a-ab+b}{(a-1)a} = \frac{1}{21} \\ \frac{ab+b-ab-a}{(a+1)a} = \frac{1}{28} \end{cases} \quad \text{兩式相除}$$

$$\Rightarrow \frac{a+1}{a-1} = \frac{28}{21} = \frac{4}{3} \Rightarrow 3a+3=4a-4 \Rightarrow a=7$$

$$\text{代回可得} \begin{cases} a=7 \\ b=9 \end{cases}$$

2.【答】：(4)

【解】： $\frac{1}{3} = \frac{12}{a} \Rightarrow a=36, \frac{1}{2} = \frac{12}{a} \Rightarrow a=24$, 可知 $24 \leq a \leq 36$

又 $\frac{12}{a}$ 為有限小數 $\Rightarrow a=24, 25, 30, 32$ 共 4 個