

主題 7 折線函數圖形

VLNM



【觀念一】絕對值基本觀念

$$|a| = \begin{cases} a, & (\text{當 } a \geq 0) \\ -a, & (\text{當 } a < 0) \end{cases}$$

〔說例〕① $|3-5| =$

② $-3 \leq x \leq 2, |x-2| + |x+3| =$

【觀念二】折線函數

$$y = f(x) = ax + b + c|x - x_1| + d|x - x_2| + e|x - x_3| + \cdots$$

此種函數型式稱為折線函數

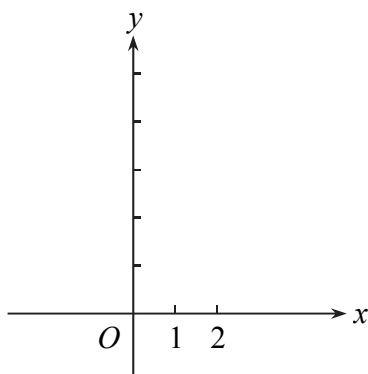
【觀念三】折線函數作圖法

(一) $y = |x| + |x-2|$ 作圖



法 1 分段討論去絕對值法

$$y = \begin{cases} & (x \geq 2) \\ & (0 \leq x < 2) \\ & (x < 0) \end{cases}$$



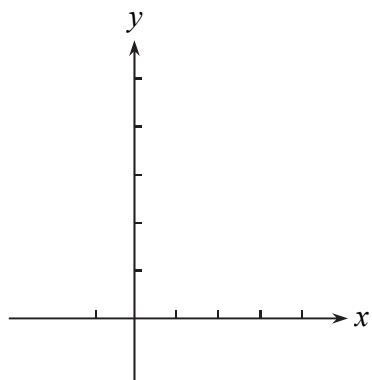
結論 觀察折線函數轉折點的位置，可以發現其轉折點的橫坐標 (x 坐標) 就是那些使絕對值內的一次式為零的數。

法 2 折點速畫法

$$y = |x| + |x-2|$$

步驟 1：先找出轉折點：

x	0	2
y		



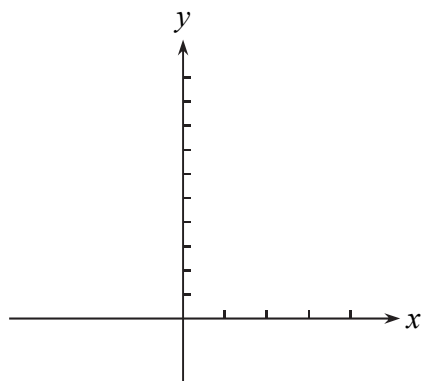
步驟 2：將折點連起來

步驟 3：在最左端與最右端各多畫一點

(二) $y = |x-1| + |x-2| + |x-3|$ 作圖

解：轉折點

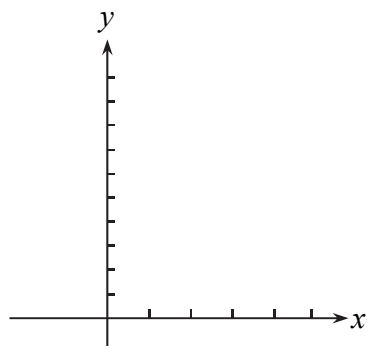
x	1	2	3
y			



(三) $y = |x-1| + |x-2| + |x-3| + |x-4|$ 作圖

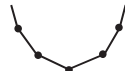
解：轉折點

x	1	2	3	4
y				

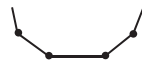


結論 由以上圖形特徵可歸納以下心得(中位數法則,折線法則):

(1) 若絕對值個數為奇數個,則函數圖形的底部為尖尖



(2) 若絕對值個數為偶數個,則函數圖形的底部為平平



例 1. (能力指標：折線極值)

求下列函數的最小值與對應的 x 值或範圍：

型一 $f(x) = |x-1| + |x-2| + |x+3|$

解：



型二 $f(x) = |x-1| + |x+2| + |x-3| + |x-4|$

解：

型三 $f(x) = |x-1| + 2|x-2| + 3|x-3|$

解：

型四 $f(x) = |x-1| + \frac{1}{2}|x-2| + \frac{1}{3}|x-3|$

解：

型五 $f(x) = |x| + |x-1| - |x-2|$

解：

例 2. (能力指標：折線不等式)

解不等式： $|x| + |x-1| \geq 2|x-2|$

解：法 1 分四段討論：

$$1^\circ \begin{cases} x \geq 2 \\ x + (x-1) \geq 2(x-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ -1 \geq -4 \end{cases} \Rightarrow x \geq 2$$

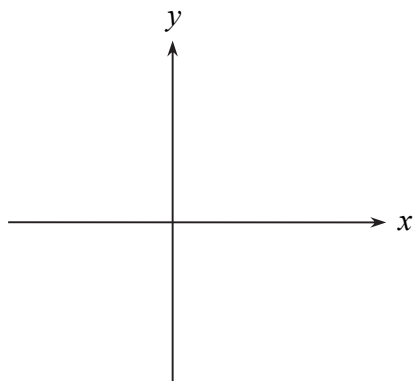
$$2^\circ \begin{cases} 1 \leq x < 2 \\ x + (x-1) \geq -2(x-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \leq x < 2 \\ 4x \geq 5 \end{cases} \Rightarrow \frac{5}{4} \leq x < 2$$

$$3^\circ \begin{cases} 0 \leq x < 1 \\ x - (x-1) \geq -2(x-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x < 1 \\ 2x \geq 3 \end{cases} \Rightarrow \text{無解}$$

$$4^\circ \begin{cases} x < 0 \\ -x - (x-1) \geq -2(x-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 0 \\ 1 \geq 4 \end{cases} \Rightarrow \text{無解}$$

綜合 $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, 4^\circ$ 知 $x \geq \frac{5}{4}$

法 2 作圖

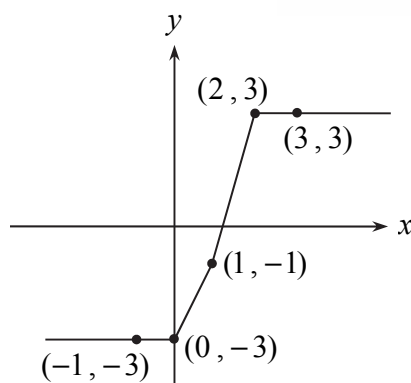


例 3. (能力指標：折線方程式)

承上題，若方程式 $|x| + |x-1| - 2|x-2| = k$ 有解，求 k 的範圍。

解：

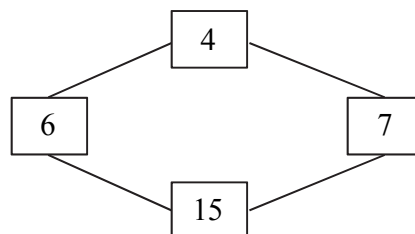
KSIB



例 4. (能力指標：折線法則應用)

圖中 4 個火柴盒中各有 4, 7, 15, 6 根火柴，依順時針或逆時針方向移動盒中的火柴到相鄰的盒中，使得最後每盒火柴數相同，問最少需移動幾根火柴？有幾種不同的移動方式？

解：





回家作業



1. 已知 $|x-1|+|x-5|=k$ 有實數解，求 k 的範圍。

HLID



2. 當 x 的範圍為_____時， $f(x)=|x|+|x-2|+|x-3|+|x-8|$ 有最小值為_____。

3. 當 $x=_____$ 時， $f(x)=\sqrt{x^2-2x+1}+\frac{1}{2}\sqrt{x^2-4x+4}+\frac{1}{5}\sqrt{x^2-10x+25}$ 有最小值為_____。



1. $k \geq 4$ 2. $2 \leq x \leq 3, 9$ 3. $1, \frac{13}{10}$



回家作業



4. $f(x) = 2|x| + |x-1| - 3|x-2|$ 之最大值為 _____，最小值為 _____。

5. 已知 $f(x) = \frac{-3}{2}|x+1| + \frac{3}{2}|x-3| + 2x - 2$ ，試回答下列問題：

- (1) 作出 $y = f(x)$ 圖形，並標出此圖形與 x 軸的交點坐標，以及圖形的轉折點坐標。
- (2) 若方程式 $f(x) = a$ 有三個實數解，則 a 的範圍為何？



4. 5, -5 5. (1) 見詳解 (2) $-2 < a < 2$