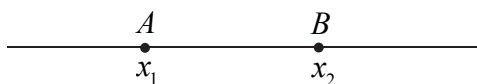


主題 5 數線

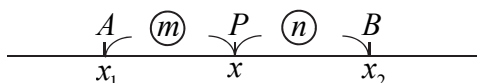


【觀念一】全部實數(有理數和無理數)和數線上的點形成一對一的對應

【觀念二】數線上二點間距離： $A(x_1)$, $B(x_2)$, $d(A, B) =$

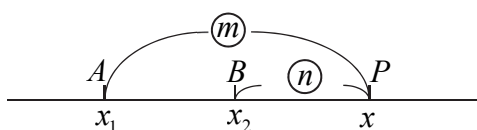


【觀念三】數線上內分點公式： $x = \frac{mx_2 + nx_1}{m + n}$



《說明》 $\frac{m}{n} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} \Rightarrow mx_2 - mx = nx - nx_1 \Rightarrow x = \frac{mx_2 + nx_1}{m + n}$

【觀念四】數線上外分點公式： $x = \frac{mx_2 - nx_1}{m - n}$



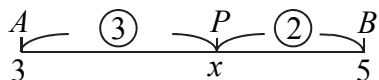
《說明》 $\frac{m}{n} = \frac{x - x_1}{x - x_2} \Rightarrow mx - mx_2 = nx - nx_1 \Rightarrow x = \frac{mx_2 - nx_1}{m - n}$

例 1. (能力指標：內外分點公式)

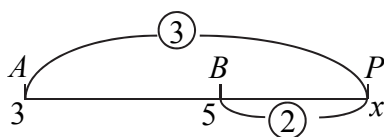
$A(3), B(5)$ ， P 在數線上，若 $\frac{AP}{BP} = \frac{3}{2}$ ，求 P 坐標？



解： 1° $x =$



2° $x =$

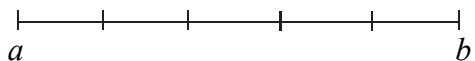
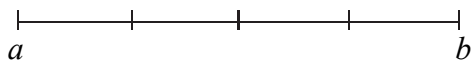
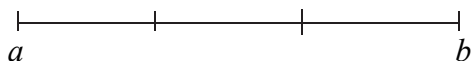
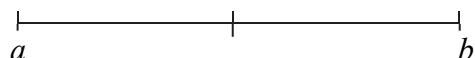


例 2. (能力指標：分點位置比大小)

設 $b > a > 0$ ，試比較 $a, b, \frac{a+b}{2}, \frac{a+2b}{3}, \frac{3a+b}{4}, \frac{2a+3b}{5}$ 的大小關係？



解：



例 3. 已知 A 與 B 兩點在數線上的坐標分別為



a 與 b (a 與 b 均不為 0)，今將 $\overline{AB}$ 平分為

17 等分，其中 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{14}, a_{15}, a_{16}$ 為等分點，則

(1) 試將 a_{14} 的坐標用 a 與 b 表示？

(2) 設 Q 點坐標為 a_3 ，今以 $\overline{AB}$ 為直徑畫圓，在此圓周上取一點 P 使得

$\overline{PQ} \perp \overline{AB}$ ，令 $\overline{AB} = \sqrt{43 - \sqrt{168}}$ ，今將 $\overline{PQ}$ 表為 $r + s\sqrt{42}$ 的形式

(r 與 s 為有理數)，求數對 $(r, s) = ?$

解：



回家作業



1. 數線上三點 $A(2)$ 、 $B(-5)$ 、 $P(x)$ ，已知 $\overline{AP}:\overline{BP}=3:4$ ，求 x 之值。



2. 設 $A(-6,0)$ 、 $B(4,0)$ 、 $P(99,2010)$ ，若點 C 在 x 軸上，且 ΔPAC 的面積為 ΔPBC 面積的 4 倍，求 C 的坐標為_____。

3. 若 $r < s$ ，令 $a = \frac{2r+3s}{5}$ ， $b = \frac{2r+5s}{7}$ ， $c = \frac{2r+7s}{9}$ ， $d = \frac{13r-2s}{11}$ ， $e = \frac{15s-2r}{13}$ ，則 a, b, c, d, e 之大小關係為_____。

4. 試比較下列數字大小：

$$a = \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3}, b = \frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{5}, c = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}, d = \frac{\sqrt{18}+\sqrt{3}}{4}。$$

簡答

1. $x = -1$ 或 $x = 23$ 2. $C(-\frac{22}{3}, 0)$ 或 $C(2, 0)$ 3. $d < a < b < c < e$
4. $d < a < b < c$

數位 延伸閱讀



1. (能力指標：無理數性質)

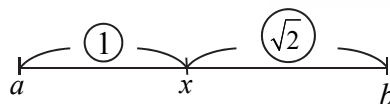
兩個不相等的有理數之間至少存在一個無理數，說明之。

解：舉例如右圖



$$1^\circ a, b \in \mathbb{Q}, a < b$$

$$\text{取內分點 } x = \frac{b + \sqrt{2}a}{1 + \sqrt{2}}$$



$$2^\circ \text{ 設 } x \in \mathbb{Q}, x = \frac{b + \sqrt{2}a}{1 + \sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow x + \sqrt{2}x = b + \sqrt{2}a \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{b-x}{x-a}$$

$$(\text{矛盾 } \because \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}, \frac{b-x}{x-a} \in \mathbb{Q})$$

$$\therefore \text{ 假設錯誤 } \therefore x \notin \mathbb{Q}, \text{ 即 } \frac{b + \sqrt{2}a}{1 + \sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$$

$$3^\circ a - x = a - \frac{b + \sqrt{2}a}{1 + \sqrt{2}} = \frac{a-b}{1 + \sqrt{2}} < 0 \Rightarrow a < x$$

$$4^\circ x - b = \frac{b + \sqrt{2}a}{1 + \sqrt{2}} - b = \frac{\sqrt{2}(a-b)}{1 + \sqrt{2}} < 0 \Rightarrow x < b$$

由 $3^\circ, 4^\circ$ 知 $a < x < b$