

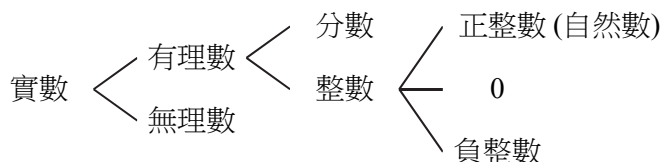
主題 4 實數

KBQS



【觀念一】何謂實數

有理數集與無理數集合稱為實數集，以 _____ 表示。



【觀念二】實數的運算性質

- (1) 結合律： $(a+b)+c=a+(b+c)$ ， $(ab)c=a(bc)$
- (2) 交換律： $a+b=b+a$ ， $ab=ba$
- (3) 分配律： $a(b+c)=ab+ac$
- (4) 消去律：若 $a+c=b+c$ ，則 $a=b$
若 $ac=bc$ 則 $a=b$ ($c \neq 0$)

【觀念三】實數的次序性質

- (1) 三一律： $a < b$ ， $a = b$ ， $a > b$ 三者中恰一式成立
- (2) 遞移律：若 $a < b$ ， $b < c$ ，則 $a < c$
- (3) 加法律：若 $a < b$ ，則 $a+c < b+c$
- (4) 乘法律：若 $a < b$ 且 $c > 0$ ，則 $ac < bc$
若 $a < b$ 且 $c < 0$ ，則 $ac > bc$

【觀念四】實數性質

- (1) 若 $a \in \mathbb{R}$ ，則 $a^2 \geq 0$
- (2) 若 $a, b \in \mathbb{R}$ ，則 $a^2 + b^2 \geq 0$
- (3) 若 $a, b \in \mathbb{R}$ ， $a^2 + b^2 = 0$ 則 $a = b = 0$
- (4) 若 $a, b \in \mathbb{R}$ ， $a^2 + b^2 \leq 0$ 則知 $a^2 + b^2 = 0$ ，則 $a = b = 0$

【觀念五】實數的封閉性

實數對加法、減法、乘法、除法（分母 $\neq 0$ ），其結果仍為實數，
這個性質稱為實數對於加、減、乘、除法具有**封閉性**。

【觀念六】實數的稠密性：_____

《說明》 $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ ，取 $x = \frac{a+b}{2}$

(1) $x \in \mathbb{R}$

(2) $a - x = a - \frac{a+b}{2} = \frac{a-b}{2} < 0 \Rightarrow a < x$

(3) $x - b = \frac{a+b}{2} - b = \frac{a-b}{2} < 0 \Rightarrow x < b$

由(2)(3)知 $a < x < b$

例 1. (能力指標：實數性質)

$x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 = 0$ ，求 x, y ？

解：原式 $\Rightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ y-2=0 \end{cases}$$

$$\therefore x=1, y=2$$



例 2. (能力指標：實數性質)

$$x, y, z \in \mathbb{R}, x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2x - 8y + 6z + 12 = 0, \text{ 求 } x, y, z ?$$

解：原式 $\Rightarrow$





回家作業



EHBY



1. 試問下列各敘述何者為假？

- (1) 兩無理數的和與積都是無理數
- (2) 有理數與無理數的和與積都是無理數
- (3) 兩實數的和與差都是有理數時，這兩數也必定是有理數
- (4) 兩實數的和與積都是有理數時，這兩數也必定是有理數。

2. 試問下列各敘述何者為真？

- (1) $\sqrt{2}$ 與 $\sqrt{3}$ 之間有無窮多個有理數
- (2) 2 與 3 之間有無窮多個無理數
- (3) 若 a 為一實數，且 a^3 與 a^5 都是有理數，則 a^{100} 是有理數
- (4) 若 a 為一實數，且 a^4 與 a^6 都是有理數，則 a 是有理數
- (5) 已知 a, b 皆為有理數且 x, y 皆為無理數，若 $a+x=b+y$ ，則 $a=b$ 且 $x=y$

3. 設 a, b, c, d 均為整數，若 $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 3 \leq 2a + 2b + 2c + 2d$ ，求四數積 $abcd$ 之值。

簡答

1. (1)(2)(4) 2. (1)(2)(3) 3. 0 或 1 或 2



回家作業



4. 已知 x, y, z, u 皆為實數且 $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 + 1 = x + y + z + u$ ，求 x, y, z, u 之值。

5. 已知 x, y 皆為有理數且 a, b 皆為無理數，試問下列各敘述哪些為真？

- (1) $\frac{a+x}{3}$ 為無理數 (2) $\frac{a}{x} + \frac{b}{y}$ 為無理數 (3) $|a| + |b|$ 為無理數
(4) ax 為無理數 (5) 若 $x + ya = 2 + 3a$ ，則 $x = 2, y = 3$ 。



4. $x = y = z = u = \frac{1}{2}$

5. (1)(5)



回家作業



6. 下列各敘述哪些為真？請選出來：

- (1) 若 a 是質數，則 $\sqrt{a}$ 是無理數
- (2) 若 a, b 皆為無理數，則 $a+b, a-b$ 之中至少有一個無理數
- (3) 若 $a-b$ 為有理數且 ab 為無理數，則 $a+b$ 為有理數
- (4) 若 $a+b, b+c, c+a$ 為有理數，則 a, b, c 皆為有理數
- (5) 存在 a, b 為無理數，使得 ab 為無理數且 $\frac{a}{b}$ 為有理數。



6. (1)(2)(4)(5)

數位 延伸閱讀



1. (能力指標：二元配方法)

$x, y \in \mathbb{R}$, $5x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 2y + 2 = 0$ ，求 x, y ？

解：

$$\text{原式} \Rightarrow y^2 + (2 - 4x)y + (5x^2 - 6x + 2) = 0$$

$\Rightarrow$

MWXT



2. (能力指標：封閉性)

$S = \{1, 0, -1\}$ ，問 S 對：

(1) 加法 (2) 乘法 是否具有封閉性？

解：

QEAS



數位[📶] 延伸閱讀回家作業



1. 設 x, y 皆為整數，且 $x^2 - 2xy + 2y^2 + 4x - 6y + 4 = 0$ ，求 $y - x$ 的最大值。



1. 3