

主題 2 有理數

SBHY

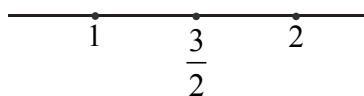


【觀念一】何謂有理數：凡是數可以寫成 _____ 型式且 $p, q \in \mathbb{Z}, p \neq 0$,
 $(p, q) = 1$ ，這樣的數稱為**有理數**，有理數集以 _____ 表示。

《說明》分數： $\frac{1}{3}$ ，整數： $5 = \frac{5}{1}$ ，循環小數： $0.\overline{31} = \frac{31}{99}$ 皆為有理數

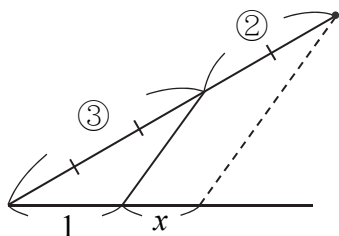
【觀念二】兩個有理數相加、相減、相乘、相除(分母 $\neq 0$)，其結果亦為 _____，此種現象，稱為有理數對加法、減法、乘法、除法具有 _____ 性。

【觀念三】在數線上有理數所對應的點稱為**有理點**。



【觀念四】利用尺規作圖作出 $\frac{2}{3}$ (已知單位長1)

方法 令 $x = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{x}{1} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{1}{x} \rightarrow$ 放在右分母

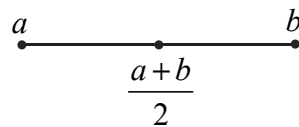


【觀念五】有理數的稠密性

$\Rightarrow$ _____

《說明》1° 二有理數 a, b ($a < b$)，找一數 $x = \frac{a+b}{2}$

2° $x = \frac{a+b}{2} \in \mathbb{Q}$ (封閉性)



3° $b - \frac{a+b}{2} = \frac{b-a}{2} > 0 \quad \therefore b > \frac{a+b}{2}$

4° $a - \frac{a+b}{2} = \frac{a-b}{2} < 0 \quad \therefore a < \frac{a+b}{2}$

綜合3° 4°知： $a < \frac{a+b}{2} < b$

【觀念六】自然數(正整數)與整數有 _____ 性。

(1) 自然數的分散性： $a, b \in \mathbb{N}$ ，若 $a \neq b$ ，則 _____。

(2) 整數的分散性： $a, b \in \mathbb{Z}$ ，若 $a \neq b$ ，則 _____。

(3) 其中 $|a-b|$ 數線上幾何意義表示：

_____。

例 1. (能力指標：真假分數法則)

a, b, x, y 為正數且 $a > b, x > y$

(1) 比較 $\frac{a}{b}, \frac{a+x}{b+x}, \frac{a+y}{b+y}$ 大小

(2) 比較 $\frac{b}{a}, \frac{b+x}{a+x}, \frac{b+y}{a+y}$ 大小

解：(1) 假分數法則： $\frac{2}{1} > \frac{3}{2} > \frac{4}{3} > \frac{5}{4} \Rightarrow$

$$\therefore \frac{a}{b} > \frac{a+y}{b+y} > \frac{a+x}{b+x}$$

證：1° $\frac{a}{b} - \frac{a+y}{b+y} = \frac{a(b+y) - b(a+y)}{b(b+y)} = \frac{(a-b)y}{b(b+y)} > 0 \Rightarrow \frac{a}{b} > \frac{a+y}{b+y}$

$$\begin{aligned} 2^\circ \frac{a+y}{b+y} - \frac{a+x}{b+x} &= \frac{(a+y)(b+x) - (a+x)(b+y)}{(b+y)(b+x)} = \frac{ax+by-ay-bx}{(b+y)(b+x)} \\ &= \frac{(a-b)(x-y)}{(b+y)(b+x)} > 0 \Rightarrow \frac{a+y}{b+y} > \frac{a+x}{b+x} \end{aligned}$$

由1°, 2°知 $\frac{a}{b} > \frac{a+y}{b+y} > \frac{a+x}{b+x}$

(2) 真分數法則： $\frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{4}{5} \Rightarrow$

$$\therefore \frac{b}{a} < \frac{b+y}{a+y} < \frac{b+x}{a+x}$$

證：1° $\frac{b}{a} - \frac{b+y}{a+y} = \frac{b(a+y) - a(b+y)}{a(a+y)} = \frac{(b-a)y}{a(a+y)} < 0 \Rightarrow \frac{b}{a} < \frac{b+y}{a+y}$

$$\begin{aligned} 2^\circ \frac{b+y}{a+y} - \frac{b+x}{a+x} &= \frac{(b+y)(a+x) - (a+y)(b+x)}{(a+y)(a+x)} = \frac{bx+ay-ax-by}{(a+y)(a+x)} \\ &= \frac{(b-a)(x-y)}{(a+y)(a+x)} < 0 \Rightarrow \frac{b+y}{a+y} < \frac{b+x}{a+x} \end{aligned}$$

由1°, 2°知 $\frac{b}{a} < \frac{b+y}{a+y} < \frac{b+x}{a+x}$



例 2. (能力指標：循環小數)

將下列循環小數化為分數：

(1) $0.\bar{7}$

(2) $0.7\bar{3}$

(3) $0.4\overline{56}$

(4) $0.\bar{9}$

解：



例 3. (能力指標：循環小數)

請選出正確的選項：

(1) $0.\overline{35} + 0.\overline{65} = 1$

(2) $0.\overline{35} > 0.354$

(3) $0.\overline{34} = 0.3\overline{43}$

(4) $\frac{169}{325}$ 化成小數後是有限小數

(5) $\frac{3}{7}$ 化成小數後是循環小數，小數點後第 100 位數字是 5

解：



例 4. (能力指標：四捨五入)

有一個**既約分數**(最簡分數)的分子與分母相差 7，將其化為小數並四捨五入至小數點後第一位得 0.5，求這個分數是多少？

解：



例 5. (能力指標：有限小數)

$a < 100, a \in \mathbb{N}$ ，求 a 的最大值使 $\frac{105}{a}$ 為有限小數。

解：





回家作業



1. 設 a, b 皆為正整數，若 $\frac{b}{a}$ 介於 $\frac{3}{24}$ 與 $\frac{2}{17}$ 之間，試求 a 的最小值。



2. 試判斷下列哪些分數可化為有限小數？

(A) $\frac{12345}{180}$ (B) $\frac{513678}{275}$ (C) $\frac{325}{52}$ (D) $\frac{909}{108}$ (E) $\frac{975}{525}$ 。

3. 設 a 為 1 至 9 的正整數，且 $\frac{13}{90} < 0.1\overline{a2} < \frac{15}{90}$ ，則 a 的值為何？

4. 若 $5.\overline{23} + 0.5\overline{23} = \frac{k}{990}$ 則 k 為_____。



1. 25 2. (B)(C) 3. $a = 5$ 或 6 4. 5698



回家作業



5. (105 數乙試題)

考慮有理數 $\frac{n}{m}$ ，其中 m 、 n 為正整數且 $1 \leq mn \leq 8$ 。則這樣的數值

(例如 $\frac{1}{2}$ 與 $\frac{2}{4}$ 同值，只算一個)共有幾個？

- (1) 14個 (2) 15個 (3) 16個 (4) 17個 (5) 18個



5. (4)

數位 延伸閱讀



1. (能力指標：連分數)

正整數 a, b, c, d 滿足 $a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d}}} = \frac{37}{13}$,

求 $a - b + c - d$ 之值？

解：



2. (能力指標：整數分散性)

設 $a, b, c \in \mathbb{Z}$, 若 $|a+1| + 3|b+2| + 4|c+3| = 3$, 則數對 (a, b, c) 有 _____ 組解。

解： 1° 觀察絕對值的係數知 $|c+3| = 0 \Rightarrow c = -3$

$$2^\circ |a+1| + 3|b+2| = 3$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|c|c} |a+1| & 3 & 0 \\ \hline |b+2| & 0 & 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|c|c|c|c} a & 2 & -4 & -1 & -1 \\ \hline b & -2 & -2 & -1 & -3 \end{array}$$

故 (a, b, c) 共有 4 組解

