



指數

主題 16 指數定義及基本運算

IUNG



【觀念一】正整數指數的定義

設 $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, 則 $a^n = a \times a \times a \times \cdots \times a$ (自乘 n 次)

a^n 唸作 a 的 n 次方, 其中 a 叫做**底數**(base number),

n 叫做**指數**(exponent), a^n 稱為**指數式**, 其結果稱為**冪**(power)。

【觀念二】零指數

(1) $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$

定義: $a^0 = 1$

(2) 注意: 0^0 是無意義

【觀念三】負整數指數

$a \in \mathbb{R}$ 且 $a \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, 則 $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

【觀念四】有理數指數(分數指數)

(1) $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$

定義: $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

(2) $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$

定義: $a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

【觀念五】實數指數運算 ($a > 0, b > 0, x, y \in \mathbb{R}$)

(1) $a^x \cdot a^y =$

(2) $\frac{a^x}{a^y} =$

(3) $(a^x)^y =$

(4) $(ab)^x =$

(5) $(\frac{a}{b})^x =$

【觀念六】重要性質 ($a > 0, x \in \mathbb{R}$)

(1) $a^x > 0$ 恆成立

(2) $a^x + a^{-x} \geq 2\sqrt{a^x \cdot a^{-x}} = 2\sqrt{a^0} = 2 \quad \therefore a^x + a^{-x} \geq 2$

(3) $a^{2x} + a^{-2x} = (a^x)^2 + (a^{-x})^2 =$

(4) $a^{3x} + a^{-3x} = (a^x)^3 + (a^{-x})^3 =$

(5) $(a^x + a^{-x})^2 = (a^x - a^{-x})^2 + 4$

(6) $(\frac{a^x + a^{-x}}{2})^2 = (\frac{a^x - a^{-x}}{2})^2 + 1$

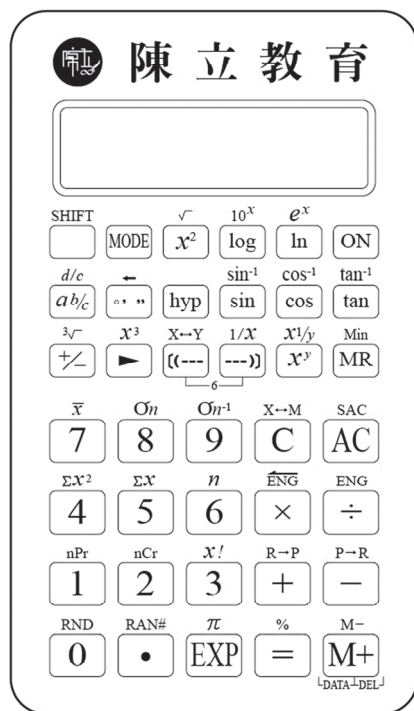
[立即練習] (1) $100^x + 100^{-x} = (10^2)^x + (10^2)^{-x} = (10^x)^2 + (10^{-x})^2$

=

(2) $9^x + 9^{-x} = (3^2)^x + (3^2)^{-x} = (3^x)^2 + (3^{-x})^2$

=

【觀念七】計算機指數求值



(1) $1.01^{365} \Rightarrow$ 1.01 $\Rightarrow$ x^y $\Rightarrow$ 365 $\Rightarrow$ =

(2) $(0.99)^{365} \Rightarrow$ 0.99 $\Rightarrow$ x^y $\Rightarrow$ 365 $\Rightarrow$ =

(3) $5^{0.5} \Rightarrow$ 5 $\Rightarrow$ x^y $\Rightarrow$ 0.5 $\Rightarrow$ =

例 1. (能力指標：指數運算)

化簡下列各式：

(1) $[a^3 \cdot (a^{-2})^4]^{-1} =$

(2) $\sqrt[3]{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[5]{a^4}}} =$

(3) $(2+\sqrt{3})^8(2-\sqrt{3})^{10} =$

(4) $729^{-\frac{1}{3}} + 32^{\frac{3}{5}} + \left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{1}{3}} =$



例 2. (能力指標：指數運算)

已知 $x > 0$ ，化簡 $\sqrt[a-b]{x^{\frac{b+c}{c-a}}} \cdot \sqrt[b-c]{x^{\frac{c+a}{a-b}}} \cdot \sqrt[c-a]{x^{\frac{a+b}{b-c}}} = ?$

解：



例 3. (能力指標：指數關係式)

$$(2.5)^x = (0.025)^y = 1000, \text{ 求 } \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = ?$$

解：



例 4. (能力指標：指數關係式)

$$8^x = 9^y = 6^z, \text{ 若 } \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = \frac{k}{z}, \text{ 求 } k = ?$$

解：



例 5. (能力指標：指數立方和)

$$\text{設 } a^{2x} = \sqrt{2} + 1, \text{ 求 } \frac{a^{3x} + a^{-3x}}{a^x + a^{-x}} = \underline{\hspace{2cm}}。$$

解：



例 6. (能力指標：指數倒數運算)

$$a > 0 \text{ 且 } a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = 3$$

求：(1) $a + a^{-1} = ?$ (2) $a^2 + a^{-2} = ?$

(3) $a^{\frac{3}{2}} + a^{-\frac{3}{2}} = ?$ (4) $a^{\frac{1}{4}} + a^{-\frac{1}{4}} = ?$

解：(1)

(2)

(3)

(4)



例 7. (能力指標：指數立方和)

已知 $a > 0$, $a^{2x} + a^{-2x} = 14$ ，求：(1) $a^x + a^{-x} = ?$ (2) $a^x = ?$

解：(1)

(2)



例 8. (能力指標：指數應用)

假設某個國家 40 年後，人口將**增加為**目前的 2 倍，問 10 年後人口是目前的幾倍？(相同時間成長倍數相同)

解：設 10 年後人口為目前的 k 倍

$$\text{則 } ak^4 = 2a$$

$$\Rightarrow k^4 = 2$$

$$\Rightarrow k = \sqrt[4]{2}$$



例 9. (能力指標：指數應用)

在某一項新試驗中，細菌數一日後**增加 a 倍**，且知三日後細菌數為 200000， $4\frac{1}{2}$ 日後細菌為 1600000，試計算

(1) $a =$ _____

(2) 5 日後細菌數

(3) $\frac{3}{2}$ 日後細菌數

(4) 當細菌數到達 800000 時所需日數

解：(1)

(2)

(3)

(4)



例 10. (能力指標：指數應用)

某放射性物質，4 天後剩下 40 克，6 天後剩下 20 克，求

- (1) 半衰期為 _____ 天。
(2) 此放射性物質原有 _____ 克。

解：



例 11. (能力指標：特殊運算)

已知 $f(x) = \frac{4^x}{4^x + 2}$ ，求 $f(\frac{1}{101}) + f(\frac{2}{101}) + \cdots + f(\frac{100}{101})$ 之值。

解：





回家作業



1. 若 $10^{2y} = 25$ ，試求 10^{-y} 之值為何？



2. 設 a, b 為正數，且滿足 $(a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}) = 2$ ， $ab^{-\frac{1}{8}} = \sqrt{b^3} \sqrt[4]{b} \sqrt[8]{b}$ ，
試求 a, b 之值。

3. 設 $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^{3y-5}}$ 且 $3^{5x+6y} = 81^{xy}$ ，求 x, y 之值。



1. $\frac{1}{5}$ 2. $(a, b) = (4, 2)$ 3. $(x, y) = (2, 5)$



回家作業



4. 假設 $2^{0.6} = 1.516$, $2^{0.03} = 1.021$, 試求 $2^{0.63}$ 與 $2^{-0.37}$ 之值。(四捨五入至三位小數)。

5. 設 a 為一正數且滿足 $a + a^{-1} = 7$, 試求 $a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}$ 與 $a^{\frac{1}{4}} + a^{-\frac{1}{4}}$ 之值。

6. $a > 0$, 設 $a^{2x} = 5 - 2\sqrt{6}$, 求下列各式的值：

(1) a^{-x} (2) $\frac{a^{3x} + a^{-3x}}{a^x + a^{-x}}$



4. 1.548, 0.774 5. 3 與 $\sqrt{5}$ 6. (1) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ (2) 9

陳立數學~136~絕對智慧
尊重著作權所有・盜翻印法律追究



回家作業



7. 依據實驗，某種細菌原有的數目為 N ，經過 x 天後細菌的數目變成 $N \cdot a^x$ 。

已知 2 天後，5 天後細菌的數目依序為 $3 \cdot 10^6$ ， $(2.4) \cdot 10^7$ ，試求：

(1) 7 天後細菌的數目。

(2) 細菌數目由原有的 N 變成 $(3.84) \cdot 10^8$ ，需要多少天？

8. 設 x, y, z 為實數，且 $2^x = 3^y = 6^z$ ，試求 $yz + zx - xy$ 之值。

9. 設 $abc \neq 0$ ，且 $2^a = 5^b = 10^c$ ，試證： $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$ 。



7. (1) 9.6×10^7 (2) 9 8. 0 9. 見詳解



回家作業



10. (87 聯考自然組試題)

假設平均每人每日產生的垃圾量，相當於長、寬、高各為 20 公分的正立方體。設我們的人口以二千一百萬計，而暫時把一日的總垃圾全堆積在一操場上，為長 100 公尺寬 20 公尺的長方體垃圾山。若一層樓之高以 3 公尺計，則此垃圾山約有多少層樓高？

- (A) 不到 8 層樓高 (B) 8 層樓至 16 層樓之間
(C) 16 層樓至 24 層樓之間 (D) 24 層樓至 32 層樓之間
(E) 超過 32 層樓高

11. (105 學測試題)

放射性物質的半衰期 T 定義為每經過時間 T ，該物質的質量會衰退成原來的一半。鉛製容器中有兩種放射性物質 A 、 B ，開始紀錄時容器中物質 A 的質量為物質 B 的兩倍，而 120 小時後兩種物質的質量相同。已知物質 A 的半衰期為 7.5 小時，請問物質 B 的半衰期為幾小時？

- (1) 8 小時 (2) 10 小時 (3) 12 小時 (4) 15 小時 (5) 20 小時



10. (D) 11. (1)



回家作業



12. (106 學測試題)

某個手機程式，每次點擊螢幕上的數 a 後，螢幕上的數會變成 a^2 。當一開始時螢幕上的數 b 為正且連續點擊螢幕三次後，螢幕上的數接近 81^3 。試問實數 b 最接近下列哪一個選項？

- (1) 1.7 (2) 3 (3) 5.2 (4) 9 (5) 81



12. (3)

數位 延伸閱讀



1. (能力指標：指數倒數運算)

XBYI



$n \in \mathbb{N}$, $x = \frac{1}{2}(5^{\frac{1}{n}} + 5^{-\frac{1}{n}})$, 試求 $(x + \sqrt{x^2 - 1})^n$ 之值。

解：

常識：(1) $(a^x + a^{-x})^2 = (a^x - a^{-x})^2 + 4$

$$(2) \left(\frac{a^x + a^{-x}}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^x - a^{-x}}{2}\right)^2 + 1$$

$$1^\circ x = \frac{5^{\frac{1}{n}} + 5^{-\frac{1}{n}}}{2} \Rightarrow x^2 = \left(\frac{5^{\frac{1}{n}} + 5^{-\frac{1}{n}}}{2}\right)^2 = \left(\frac{5^{\frac{1}{n}} - 5^{-\frac{1}{n}}}{2}\right)^2 + 1$$

$$\therefore x^2 - 1 = \left(\frac{5^{\frac{1}{n}} - 5^{-\frac{1}{n}}}{2}\right)^2$$

$$\begin{aligned} 2^\circ (x + \sqrt{x^2 - 1})^n &= \left[\frac{5^{\frac{1}{n}} + 5^{-\frac{1}{n}}}{2} + \sqrt{\left(\frac{5^{\frac{1}{n}} - 5^{-\frac{1}{n}}}{2}\right)^2} \right]^n \\ &= \left(\frac{5^{\frac{1}{n}} + 5^{-\frac{1}{n}}}{2} + \left| \frac{5^{\frac{1}{n}} - 5^{-\frac{1}{n}}}{2} \right| \right)^n \quad \left(\because \frac{1}{n} > -\frac{1}{n} \therefore 5^{\frac{1}{n}} > 5^{-\frac{1}{n}} \right) \\ &= \left(\frac{5^{\frac{1}{n}} + 5^{-\frac{1}{n}}}{2} + \frac{5^{\frac{1}{n}} - 5^{-\frac{1}{n}}}{2} \right)^n = (5^{\frac{1}{n}})^n = 5 \end{aligned}$$

主題 17 指數比較大小



【觀念一】若 $a, x, y \in \mathbb{R}$, $a > 1$, $x > y$, 則

【觀念二】若 $a, x, y \in \mathbb{R}$, $0 < a < 1$, $x > y$, 則

《說明》(1) $3^5 > 3^4$

$$(2) \left(\frac{1}{3}\right)^5 < \left(\frac{1}{3}\right)^4$$

【觀念三】一般比較大小的方法：

① _____

② _____

例 1. (能力指標：同底數比較大小)

下列哪一個數值最小？

- (A) $(0.9)^{-3.5}$ (B) $(0.9)^{-2.5}$ (C) $(0.9)^{-1.5}$ (D) $(0.9)^{-\sqrt{3}}$
(E) $(0.9)^{-\sqrt{5}}$

解：



例 2. (102 學測試題)

YFQB



令 $a = 2.6^{10} - 2.6^9$, $b = 2.6^{11} - 2.6^{10}$, $c = \frac{2.6^{11} - 2.6^9}{2}$ 。請選出

正確的大小關係。

- (1) $a > b > c$ (2) $a > c > b$ (3) $b > a > c$
(4) $b > c > a$ (5) $c > b > a$

解：

例 3. (能力指標：同指數比較大小)

VXUK



比較 $a = \sqrt{3}$, $b = \sqrt[3]{4}$, $c = \sqrt[4]{5}$ 之大小。

解： 本題採用方法為

例 4. (能力指標：指數比較大小)

$x > 0, y > 0, z > 0$ ，若 $2^x = 3^y = 5^z$ ，比較 $2x, 3y, 5z$ 之大小。

解：





回家作業



1. 比較 $a = \left(\frac{1}{3}\right)^{0.4}$, $b = \frac{1}{\sqrt[6]{9}}$, $c = \sqrt[5]{\frac{1}{27}}$, $d = 9^{-\frac{1}{4}}$ 的大小。



2. 比較下列各數的大小： $a = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$, $b = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$, $c = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{5}}$



1. $c < d < a < b$ 2. $c > a > b$



回家作業



3. (93 學測試題)

下列選項中的數，何者最大？[其中 $n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$]

- (1) 100^{10} (2) 10^{100} (3) 50^{50} (4) $50!$ (5) $\frac{100!}{50!}$



3. (2)