

DKFH



【觀念四】 分母有理化 $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$

YQPJ


$$(2) \text{ 原式} = \sqrt{\frac{8}{3} \cdot \frac{3}{3}} = \frac{\sqrt{24}}{3} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

例 2. (能力指標：有理化)



試有理化：(1) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ (2) $\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

解：(1) 原式 = $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{30}+5-3\sqrt{2}-\sqrt{15}}{2}$

(2) 原式 = $\frac{1}{(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}} \times \frac{(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}}$
 $= \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$
 $= \frac{\sqrt{2}+1-\sqrt{6}}{4}$

例 3. (能力指標：有理化)



化簡 $\frac{\sqrt{35}+\sqrt{21}+5+\sqrt{15}}{\sqrt{7}+2\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

解：1° 先有理化倒數

$$\begin{aligned}\text{倒數} &= \frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}+\sqrt{5}+\sqrt{3}}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{5}+\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{5}+\sqrt{3})} + \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{5}+\sqrt{3})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} \\ &= \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

$$2^\circ \text{ 原數} = \frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}$$

例 4. (能力指標：有理化)

IJTH



化簡 $\frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}} = ?$

解： $\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} \cdot \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}} = \sqrt{k+1}-\sqrt{k}$

$$\begin{aligned}\text{原式} &= (\sqrt{2}-1) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + (\sqrt{4}-\sqrt{3}) + \cdots + (\sqrt{100}-\sqrt{99}) \\ &= -1 + \sqrt{100} \\ &= -1 + 10 \\ &= 9\end{aligned}$$



回家作業



1. 滿足 $\sqrt{90x}$ 為正整數且 $1 \leq x \leq 100$ 的正整數 x 之值有_____個。



2. 化簡 $\frac{1}{2-\sqrt{3}} - \frac{5\sqrt{2}}{1+\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} =$ _____。

3. $(\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \frac{3}{2\sqrt{2}+\sqrt{5}})^2$ 經化簡後可得結果為_____。



1. 3 2. 2 3. 2



回家作業



4. 若 $x = \sqrt{7} + \sqrt{6}$, $y = \sqrt{6} - \sqrt{7}$, 則 $2x^2 + 3xy + 2y^2 =$ _____。

5. 若 $\frac{1}{\sqrt{4-\sqrt{14}}} = \frac{\sqrt{b+c\sqrt{14}}}{a}$, 求 $a+b+c$ 之值, 其中 a, b, c 為最小正整數解。

6. 實數 a 滿足 $|1996 - a| + \sqrt{a - 1997} = a$, 則 $a - 1996^2$ 之值為_____。



4. 49 5. 12 6. 1997



回家作業



7. $a = \sqrt{5} + \sqrt{7} + \sqrt{11}$, $b = \sqrt{2} + \sqrt{7} + \sqrt{14}$, $c = \sqrt{2} + \sqrt{10} + \sqrt{11}$, 則 a, b, c 的大小關係為何？
- (A) $a > b > c$ (B) $a > c > b$ (C) $b > c > a$
(D) $c > b > a$ (E) $c > a > b$ 。

8. 化簡 $\frac{12}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(分母不可含方根)

9. 試化簡 $\frac{1}{1+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{23}+\sqrt{25}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



7. (B) 8. $2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} - \sqrt{30}$ 9. 2



回家作業



10. 請選出選項當中最大者：

- (1) $10-3\sqrt{11}$ (2) $51-10\sqrt{26}$ (3) $3\sqrt{11}-10$
(4) $10\sqrt{26}-51$ (5) $\sqrt{401}-20$ 。

11. 已知 $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，則 $\frac{1-x}{1-\sqrt{1-x}} + \frac{1+x}{1+\sqrt{1+x}}$ 之值為 _____。

12. 化簡 $\sqrt{(5+2\sqrt{6})^3} + \sqrt{(5-2\sqrt{6})^3}$ 可得下列選項中的哪個值？請選出來。

- (1) $13\sqrt{2}$ (2) $17\sqrt{3}$ (3) $17\sqrt{5}$ (4) $18\sqrt{3}$ (5) $18\sqrt{2}$ 。



10. (1) 11. 1 12. (4)



回家作業



13. 比較下列各數中，何者最小？

(1) $\sqrt{400} + \sqrt{400}$

(2) $\sqrt{401} + \sqrt{399}$

(3) $\sqrt{402} + \sqrt{398}$

(4) $\sqrt{403} + \sqrt{397}$ 。

14. 已知 $x = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$ ，則 $x^3 - \frac{1}{x^3} =$ _____ 。



13. (4) 14. $126\sqrt{15}$



回家作業



15. (103 學測試題)

關於下列不等式，請選出正確的選項。

- (1) $\sqrt{13} > 3.5$ (2) $\sqrt{13} < 3.6$ (3) $\sqrt{13} - \sqrt{3} > \sqrt{10}$
(4) $\sqrt{13} + \sqrt{3} > \sqrt{16}$ (5) $\frac{1}{\sqrt{13} - \sqrt{3}} > 0.6$



15. (1)(4)



型二 三次根式

【觀念一】原理： $(x+y)(x^2-xy+y^2)=x^3+y^3$

$$(x-y)(x^2+xy+y^2)=x^3-y^3$$



【觀念二】立方根式分母有理化

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}} &= \frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}} \times \frac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}} \\ &= \frac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{a+b}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}} &= \frac{1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}} \times \frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}} \\ &= \frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{a-b}\end{aligned}$$

1. (能力指標：三次根式有理化)



試有理化：(1) $\frac{1}{\sqrt[3]{12}}$ (2) $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$ (3) $\frac{5}{2-\sqrt[3]{3}}$ (4) $\frac{5}{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}$

解：(1) 原式 $= \frac{1}{\sqrt[3]{2^2 \cdot 3}} \times \frac{\sqrt[3]{2 \cdot 3^2}}{\sqrt[3]{2 \cdot 3^2}} = \frac{\sqrt[3]{18}}{6}$

(2) 原式 $= \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}} \times \frac{\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3^2}} = \frac{\sqrt[3]{18}}{3}$

(3) 原式 $= \frac{5}{2-\sqrt[3]{3}} \times \frac{2^2+2 \cdot \sqrt[3]{3}+(\sqrt[3]{3})^2}{2^2+2 \cdot \sqrt[3]{3}+(\sqrt[3]{3})^2} = \frac{5 \cdot (4+2\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9})}{2^3-3} = 4+2\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}$

(4) 原式 $= \frac{5}{(\sqrt[3]{2})^2+\sqrt[3]{2}+1} \times \frac{\sqrt[3]{2}-1}{\sqrt[3]{2}-1} = \frac{5(\sqrt[3]{2}-1)}{2-1} = 5(\sqrt[3]{2}-1)$

2. (能力指標：三次方根方程組)

LRZJ



解聯立方程式 $\begin{cases} x-y=29 \\ \sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{y+2}=2 \end{cases}$ 得 y 之值為 _____。

解： 令 $\begin{cases} a=\sqrt[3]{x-1} \\ b=\sqrt[3]{y+2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^3=x-1 \\ b^3=y+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=a^3+1 \\ y=b^3-2 \end{cases}$

$$\begin{cases} (a^3+1)-(b^3-2)=29 \\ a-b=2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^3-b^3=26 \\ a-b=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a-b)(a^2+ab+b^2)=26 \\ a-b=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2+ab+b^2=13 \\ a-b=2 \end{cases}$$

消去 a 得 $(b+2)^2+(b+2)b+b^2=13$

$$\Rightarrow 3b^2+6b-9=0 \Rightarrow b^2+2b-3=0 \Rightarrow b=-3 \text{ 或 } 1$$

$$\therefore \begin{cases} a=-1 \\ b=-3 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a=3 \\ b=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=a^3+1=0 \\ y=b^3-2=-29 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=a^3+1=28 \\ y=b^3-2=-1 \end{cases}$$

3. (能力指標：三次方根化簡)

MSVI



試證： $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4$ 。

解： 令 $x=\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow x^3=40+6x$$

$$\Rightarrow x^3-6x-40=0$$

$$\Rightarrow (x-4)\underbrace{(x^2+4x+10)}_{D<0}=0$$

$$\therefore x=4, \text{ 即 } \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4$$

$$x=a+b$$

$$\Rightarrow x^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

$$\Rightarrow x^3=a^3+b^3+3ab\underbrace{(a+b)}_x$$

$$\Rightarrow x^3=a^3+b^3+3abx$$

$$\begin{aligned} ab &= \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} \\ &= \sqrt[3]{400-392} = \sqrt[3]{8} = 2 \end{aligned}$$

數位[📶]延伸閱讀回家作業



1. 試將 $\frac{6}{\sqrt[3]{4}-1}$ 之分母有理化。

RFKA



1. $2(2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} + 1)$