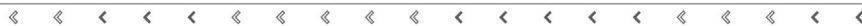


主題 12 因式分解



型一 分組提出公因式

BMYN



例 1. 試因式分解下列各式：(1) $ab(1-c^2)-c(a^2-b^2)$

$$(2) 9+3(x^2+x+1)+x^2(x+1)$$

解：(1) 原式 $= ab - abc^2 - a^2c + b^2c$

$$= ab + b^2c - a^2c - abc^2$$

$$= b(a+bc) - ac(a+bc)$$

$$= (a+bc)(b-ac)$$

$$(2) \text{ 原式} = x^3 + 4x^2 + 3x + 12$$

$$= x^2(x+4) + 3(x+4)$$

$$= (x+4)(x^2+3)$$

例 2. 因式分解 $1-a^3+b^3-a^3b^3=?$

解：原式 $= (1-a^3) + b^3(1-a^3)$

$$= (1-a^3)(1+b^3)$$

$$= (1-a)(1+a+a^2)(1+b)(1-b+b^2)$$

XVTH



型二 十字交乘法

例 1. 試因式分解下列各式：(1) $a^2b^2x^2 + 3ab^2x - 4b^2$

$$(2) 5x^3y - 25x^2y^2 + 30xy^3$$

$$(3) x^2 - 2bx - (a^2 - b^2)$$

解：(1) 原式 $= b^2(a^2x^2 + 3ax - 4) = b^2(ax + 4)(ax - 1)$

$$(2) \text{原式} = 5xy(x^2 - 5xy + 6y^2) = 5xy(x - 2y)(x - 3y)$$

$$(3) \text{原式} = x^2 - 2bx - (a + b)(a - b) \\ = (x + a - b)(x - a - b)$$



例 2. 因式分解(1) $(x^2 + 2x + 4)(x^2 + 2x - 6) + 21$

$$(2) (x^2 + 3x + 2)(x^2 + 7x + 12) - 3$$

解：(1) 原式 $= \underline{(x^2 + 2x + 4)}(\underline{x^2 + 2x - 6}) + 21$

$$= (x^2 + 2x)^2 - 2(x^2 + 2x) - 3$$

$$= (x^2 + 2x - 3)(x^2 + 2x + 1)$$

$$= (x + 3)(x - 1)(x + 1)^2$$

$$(2) \text{原式} = (x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) - 3$$

$$= (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) - 3$$

$$= (x^2 + 5x)^2 + 10(x^2 + 5x) + 21$$

$$= (x^2 + 5x + 7)(x^2 + 5x + 3)$$



型三 拆項與補項

例 1. 試因式分解下列各式：(1) $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$

$$(2) x^4 + 4$$

解：(1) 原式 $= x^4 + x^3 + x^2 + x^2 + x + 1$
 $= x^2(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1)$
 $= (x^2 + x + 1)(x^2 + 1)$

(2) 原式 $= (x^2 + 2)^2 - 4x^2$
 $= (x^2 + 2)^2 - (2x)^2$
 $= (x^2 + 2 + 2x)(x^2 + 2 - 2x)$
 $= (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$

例 2. (1) 因式分解 $n^4 - 6n^2 + 25$

(2) $n \in \mathbb{Z}$ ，若 $n^4 - 6n^2 + 25$ 為一質數，求 n 與此質數。

解：(1) 原式 $= (n^2 + 5)^2 - 16n^2$
 $= (n^2 + 5)^2 - (4n)^2$
 $= (n^2 + 5 + 4n)(n^2 + 5 - 4n)$
 $= (n^2 + 4n + 5)(n^2 - 4n + 5)$

(2) $P = ab$ 為質數 $\Rightarrow a = \pm 1$ 或 $b = \pm 1$

由(1)得 (i) $n^2 + 4n + 5 = 1 \Rightarrow n = -2$ ，原數為 17

(ii) $n^2 + 4n + 5 = -1 \Rightarrow$ 無解

(iii) $n^2 - 4n + 5 = 1 \Rightarrow n = 2$ ，原數為 17

(iv) $n^2 - 4n + 5 = -1 \Rightarrow$ 無解

$\therefore n = \pm 2$ ，此質數為 17



型四 強迫分解

- 例 1. 因式分解：(1) $xy + 3x - 2y - 6$
(2) $xy + 5x + 4y + 20$
(3) $x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1$



解：(1) $\begin{pmatrix} x & \times & -2 \\ y & & +3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{原式} = (x-2)(y+3)$

(2) $\begin{pmatrix} x & \times & +4 \\ y & & +5 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{原式} = (x+4)(y+5)$

(3) $\begin{pmatrix} x^2 & \times & -1 \\ y^2 & & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{原式} = (x^2-1)(y^2-1)$
 $= (x-1)(x+1)(y-1)(y+1)$

型五 配合整數解

例 1. 設 $x \in \mathbb{N}$ 且 $\sqrt{x^2 + 71} \in \mathbb{N}$ ，試解 $x = ?$

解：令 $\sqrt{x^2 + 71} = k, k \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow x^2 + 71 = k^2$$

$$\Rightarrow k^2 - x^2 = 71$$

$$\Rightarrow (k+x)(k-x) = 71$$

大 小

$$\begin{array}{r|l} k+x & 71 \\ k-x & 1 \end{array}$$

$$\therefore k = 36, x = 35$$



例 2. 設 $x, y \in \mathbb{Z}$ 且 $\frac{5}{x} + \frac{4}{y} = 1$ ，試解數對 $(x, y) = ?$

解： $\frac{5}{x} + \frac{4}{y} = 1$

$$\Rightarrow 5y + 4x = xy$$

$$\Rightarrow xy - 4x - 5y = 0$$

$$\Rightarrow (x-5)(y-4) = 20$$

$x-5$	1	2	4	5	10	20	-1	-2	-4	-5	-10	-20
$y-4$	20	10	5	4	2	1	-20	-10	-5	-4	-2	-1

x	6	7	9	10	15	25	4	3	1	0	-5	-15
y	24	14	9	8	6	5	-16	-6	-1	0	2	3

↑

不合

共有 11 組解

例 3. (能力指標：平方差)

已知**直角**三角形的三邊長皆為整數，且有一股的長度是 20，
求這樣的直角三角形有幾個？



解：設另一股為 a ，斜邊為 b ， $a, b \in \mathbb{N}$ 且 $b > a$ ，則

$$a^2 + 20^2 = b^2$$

$$\Rightarrow b^2 - a^2 = 400$$

$$\Rightarrow (b-a)(b+a) = 400$$

↓ ↓

小 大

$$\Rightarrow \begin{array}{c|c|c|c|c} b-a & 2 & 4 & 8 & 10 \\ \hline b+a & 200 & 100 & 50 & 40 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|c|c|c|c} b & 101 & 52 & 29 & 25 \\ \hline a & 99 & 48 & 21 & 15 \end{array}$$

故滿足題目的三角形共有 4 個



回家作業



1. 下列何者為 $xy - 8 + 4x - 2y$ 的因式？

- (A) $x+2$ (B) $x-2$ (C) $x-4$ (D) $x-8$ 。



2. 下列哪一個式子是 $\frac{a^3}{8} - b^3$ 的因式？

- (A) $a^2 - 2ab + 4b^2$ (B) $a^2 + 2ab + 4b^2$ (C) $2a+b$ (D) $a+2b$ 。

3. 因式分解 $4x^2y^2 + 2xy - x^2 - y^2$ 。



1. (B) 2. (B) 3. $(2xy + x - y)(2xy - x + y)$



回家作業



4. 下列何者正確？

(A) $(a-b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

(B) $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3-b^3$

(C) $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)=a^4-a^2b^2+b^4$

(D) $(a+b)(a-b)(a^2+b^2)=a^4-b^4$ 。

5. 試因式分解 $ab(1-c^2)-c(a^2-b^2)$ 。

6. 在 240 與 250 之間恰有一個正整數可以整除 $2^{24}-1$ ，則此數為_____。



4. (D) 5. $(a+bc)(b-ac)$ 6. 241



回家作業



7. 求 $x^2 - 4y^2 = 1$ 之整數解。

8. 下列何者不是 $x^5 - 3x^3 - 4x$ 的因式？

- (A) $x-2$ (B) $x+2$ (C) x^3+x (D) $x-1$ 。

9. 計算 $\frac{(10^4+64)(18^4+64)(26^4+64)(34^4+64)(42^4+64)}{(6^4+64)(14^4+64)(22^4+64)(30^4+64)(38^4+64)}$ 之值。

[提示：利用 x^4+64 的因式分解]



7. (1, 0) 或 (-1, 0) 8. (D) 9. 97



回家作業



10. 因式分解 $a^4 + 4b^4$ 。

11. 因式分解 $(a^2 - 1)(b^2 - 1) - 4ab$ 。

12. 有三個質數，其積為其和的 19 倍，求此三質數和。



10. $(a^2 + 2ab + 2b^2)(a^2 - 2ab + 2b^2)$ 11. $(ab + a + b - 1)(ab - a - b - 1)$ 12. 33



回家作業



13. 因式分解 $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15$ 。(分成 4 個一次因式)

14. 解 $(x+1)(2x+1)(3x-1)(4x-1)+6x^4=0$ 。

15. 已知 x 和 $\sqrt{x^2-9x-1}$ 皆為整數，試求 x 之值。



13. $(x+2)(x+6)(x+4-\sqrt{6})(x+4+\sqrt{6})$ 14. $x = \frac{-1 \pm \sqrt{6}}{5}$ 或 $\frac{-1 \pm \sqrt{7}}{6}$

15. $x = 26$ or 10 or -17 or -1



回家作業



16. 因式分解 $(ab-1)^2 + (a+b)(ab+1) + 5ab$ 。

17. 因式分解 $(xy+1)(x+1)(y+1) + xy$ 。



16. $(ab+1+a)(ab+1+b)$ 17. $(xy+1+x)(xy+1+y)$

數位 延伸閱讀



型六 雙十字交乘法

1. 因式分解 $x^2 + xy - 6y^2 - 3x + 11y - 4$

解： $\begin{pmatrix} x & +3y & -4 \\ x & -2y & +1 \end{pmatrix}$

$$\text{原式} = (x + 3y - 4)(x - 2y + 1)$$



2. 因式分解 $3x^2 - 8xy - 3y^2 - 10x - 10y - 8$

解： $\begin{pmatrix} 3x & +y & +2 \\ x & -3y & -4 \end{pmatrix}$

$$\text{原式} = (3x + y + 2)(x - 3y - 4)$$



3. 因式分解 $2x^2 - xy - 6y^2 + 5x + 11y - 3$

解： $\begin{pmatrix} 2x & +3y & -1 \\ x & -2y & +3 \end{pmatrix}$

原式 = $(2x + 3y - 1)(x - 2y + 3)$

