

主題 10 算幾不等式

BAHX



1. 平均數

(1) 算術平均數：

n 個實數 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 的算術平均數被定義為

$$A = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n}。$$

(2) 幾何平均數：

n 個正數 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 的幾何平均數被定義為

$$G = \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \dots a_n}。$$

2. 二元算幾不等式

(1) 二變數算幾不等式：

若 $a \geq 0, b \geq 0$ ，此時 $A = \frac{a+b}{2}$ ， $G = \sqrt{ab}$ ，則不等式 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 恆成立。

且只有在 $a=b$ 時，不等式的等號才會成立。

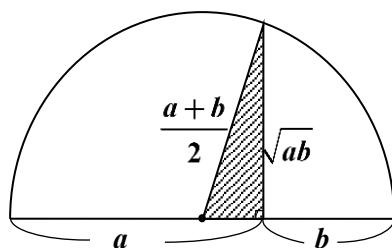
【證明 1】

$$\therefore \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0$$

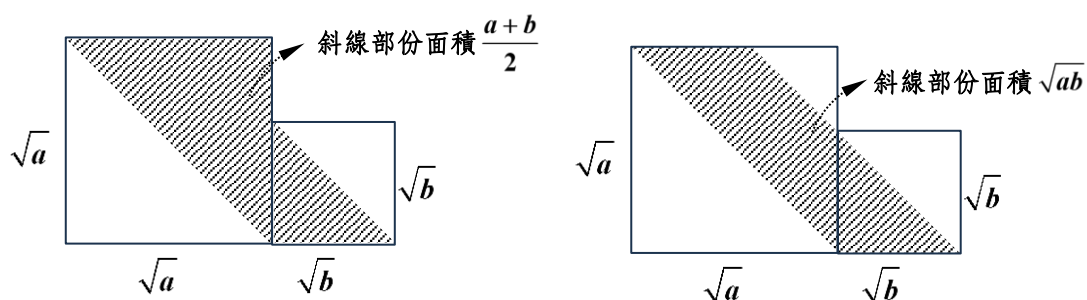
$$\therefore \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

$$\text{又 } \frac{a+b}{2} = \sqrt{ab} \text{ 時，即 } \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} = 0 \text{ 時，此時 } a=b$$

【證明 2】 *proof without words*



【證明 3】 *proof without words*



(2) 使用時機：

① 相加、相乘同時出現，欲求極值。

已知 $x + 2y = 4$ ，求 xy 的最大值。	[2]
已知 $a > 0, b > 0$ ， $a^2 + 4b^2 = 8$ ，求 ab 的最大值。	[2]
已知 $x > 0, y > 0$ 且 $xy = 100$ ，求 $\frac{1}{x} + \frac{16}{y}$ 之最小值。	$[\frac{4}{5}]$
已知 $x \geq 2, y \geq -1$ ， $(x-2)(y+1) = 54$ ，求 $3x + 2y$ 的最小值。	[40]

② 倒數相加求極值。

求 $x^2 + \frac{9}{x^2}$ 的最小值。	[6]
已知 $x > 2$ ，求 $x + \frac{4}{x-2}$ 的最小值。	[6]

3. n 元算幾不等式 [自行參考]

(1) n 變數算幾不等式：

設 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 為 n 個正數或 0，以下不等式恆成立：

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}。$$

且只有在 $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ 時，不等式的等號才會成立。

(2) 四變數算幾不等式：

假設 $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0, d \geq 0$ ，則不等式 $\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$ 恆成立。

且只有在 $a=b=c=d$ 時，不等式的等號才會成立。

【證明】

$$\frac{a+b+c+d}{4} = \frac{\frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2}}{2} \geq \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{c+d}{2}\right)} \geq \sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}} = \sqrt[4]{abcd}$$

(3) 三變數算幾不等式：

假設 $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ ，則不等式 $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ 恆成立。

且只有在 $a=b=c$ 時，不等式的等號才會成立。

【證明】

將 $d = \frac{a+b+c}{3}$ 代入 $\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$ 可得

$$\begin{aligned} \frac{a+b+c + \frac{a+b+c}{3}}{4} &\geq \sqrt[4]{abc\left(\frac{a+b+c}{3}\right)} \Rightarrow \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[4]{abc\left(\frac{a+b+c}{3}\right)} \\ \Rightarrow \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^4 &\geq abc\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \Rightarrow \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \geq abc \Rightarrow \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \end{aligned}$$

型一**基本型算幾不等式****例 1**

已知 $x > 0$, $y > 0$, $xy = 6$, 求 $2x + 3y$ 的最小值, 並求有最小值時之數對 (x, y) 。

解

CETU

**例 2**

已知 $a > 0$, $b > 0$, $a^2 + 4b^2 = 8$, 求 ab 的最大值。

解

例 3

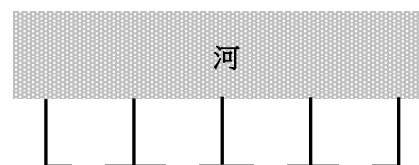
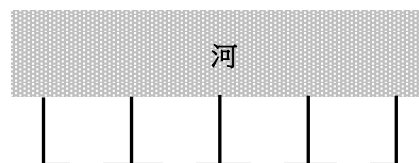
已知 $x > 0$, $y > 0$ 且 $xy = 100$ ，求 $\frac{1}{x} + \frac{16}{y}$ 之最小值。

解

例 4

如右圖，在河邊欲用圍籬圍出四間全等的矩形菜圃，且靠河的一邊不須圍籬，又圍籬共長 112 公尺。且每間菜圃都有一個 2 公尺的入口。則此四間菜圃的最大面積和為_____平方公尺。

解



型二**倒數型算幾不等式****例 5**

- (1) 已知 $x > 0$ ，證明 $x + \frac{4}{x} \geq 4$ 。
- (2) 已知 $x > -1$ ，求 $f(x) = x + \frac{9}{x+1}$ 的最小值。

解**▣ [挑戰題]**

已知 $t > 1$ ，則 $\frac{t^4}{t^2-1}$ 的最小值為_____。

答：4

例 6 | 等號成立的重要性

設 x 為任意實數，且函數 $f(x) = x^2 + 4 + \frac{1}{x^2 + 4}$ ，試回答下列問題：

- (1) 敘述「 $f(x) \geq 2$ 」是否正確？
- (2) 函數 $f(x)$ 的最小值是否為 2？試寫出原因。

解

型三 進階型算幾不等式

例 7

已知 $x \geq 2$, $y \geq -1$, $(x-2)(y+1) = \frac{27}{2}$, 求 $3x+2y$ 的最小值。

解

▣ [台中女中]

已知 a, b 為正實數，且 $2a+b=16$ ，求 $(a+1)(b+2)$ 的最大值為_____。

答：50

▣ [北一女中]

已知 $x > 3$, $y > 0$, $2x+xy-3y=60$ ，求 $2x+3y$ 的最小值。

答：36

例 8

已知 $x > 0, y > 0$ ，求 $(3x - \frac{2}{y})(2y - \frac{3}{x})$ 的最小值。

解

▣ [衛道中學]

設 $x > 0, y > 0, z > 0$ ，則 $\frac{2y-x}{x} + \frac{4(x-2y+z)}{y} - \frac{8(z-y)}{z} + 17$ 的最小值為_____。

答： $12\sqrt{2}$