

主題 8 實數

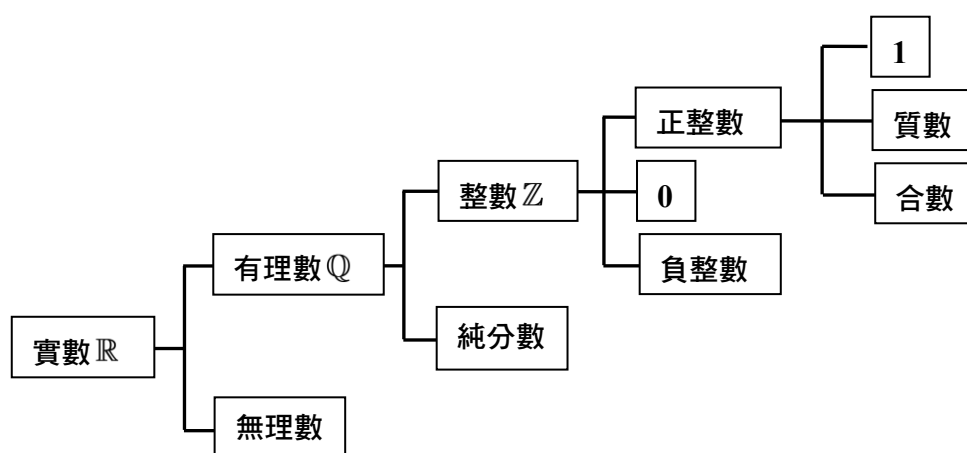
KBQS



1. 實數

(1) 實數結構：

實數僅包含有理數與無理數兩部份，其餘結構如下：



(2) 實數的四則運算具封閉性：

實數經加、減、乘、除四則運算之後其結果仍為實數 (除法之除數不可為 0)。

(3) 實數具有稠密性：

① 若 $a, b \in \mathbb{R}$ 且 $a < b$ ，則兩相異實數 a, b 間必存在另一實數 x ，使得 $a < x < b$

(取 $x = \frac{a+b}{2}$ 即可)。此性質稱為實數稠密性。

② 有理數系與無理數系同樣具有稠密性。

③ 兩相異有理數間必存在一個無理數。【高中範圍不討論其證明】

④ 兩相異無理數間必存在一個有理數。【高中範圍不討論其證明】

⑤ 無理數與有理數都是無限多個，而無理數的數量大於有理數的數量。

2. 實數的性質

(1) 實數的運算性質：

若 a, b, c 皆為實數，則 a, b, c 滿足以下性質：

- ① 加法交換律： $a+b=b+a$
- ② 乘法交換律： $ab=ba$
- ③ 加法結合律： $(a+b)+c=a+(b+c)$
- ④ 乘法結合律： $(ab)c=a(bc)$
- ⑤ 左分配律： $a(b+c)=ab+ac$
- ⑥ 右分配律： $(b+c)a=ba+ca$
- ⑦ 加法消去律： $a+c=b+c \Rightarrow a=b$
- ⑧ 乘法消去律： $ab=ac (a \neq 0) \Rightarrow b=c$

(2) 實數的次序性質：

若 a, b, c 皆為實數，則 a, b, c 滿足以下性質：

- ① 三一律： $a > b$, $a = b$, $a < b$ 三者中必有一個且僅有一個成立。
- ② 遞移律：若 $a > b$, $b > c$ ，則 $a > c$ 。
- ③ 加法次序性：若 $a > b$ ，則 $a+c > b+c$ 。
- ④ 乘法次序性：若 $a > b$ 且 $c > 0$ ，則 $ac > bc$ ；若 $a > b$ 且 $c < 0$ ，則 $ac < bc$ 。
- ⑤ 平方次序性：若 $a > b > 0$ ，則 $a^2 > b^2$ ；若 $a < b < 0$ ，則 $a^2 > b^2$ 。

(3) 實數運算經驗法則：

- ① 若 $a \in \mathbb{R}$ ，則 $a^2 \geq 0$ 。
- ② 若 $a, b \in \mathbb{R}$ ，且 $a^2 + b^2 = 0$ ，則 $a = b = 0$ 。
- ③ 若 $a, b \in \mathbb{R}$ ，且 $a^2 + b^2 \leq 0$ ，則 $a = b = 0$ 。
- ④ 若 $a, b, c \in \mathbb{R}$ ，且 $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$ ，則 $a = b = c$ 。
- ⑤ 若 $a, b, c \in \mathbb{R}$ ，且 $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \leq 0$ ，則 $a = b = c$ 。

(4) 真假分數結構法則：

① 假分數法則：設 a, b, x, y 為正實數且 $a > b, x > y$ ，則 $\frac{a}{b} > \frac{a+y}{b+y} > \frac{a+x}{b+x}$ 。

【說明】

$$\frac{2}{1} > \frac{3}{2} > \frac{4}{3} > \frac{5}{4}$$

② 真分數法則：設 a, b, x, y 為正實數且 $a > b, x > y$ ，則 $\frac{b}{a} < \frac{b+y}{a+y} < \frac{b+x}{a+x}$ 。

【說明】

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{4}{5}$$

(5) 運算封閉性的討論：

以下為各數系對於四則運算是否具封閉性的註記。

	加	減	乘	除 (分母不為 0)
正整數	✓		✓	
整數	✓	✓	✓	
有理數	✓	✓	✓	✓
無理數				
實數	✓	✓	✓	✓

例 1

設 x, y, z 皆為實數且 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2x - 8y + 6z + 12 = 0$ ，求 x, y, z 。

解 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2x - 8y + 6z + 12 = 0$

WXZL



例 2

若 $a \geq -1, b \geq 2, c \geq -1$ 且 $a + b + c + 3 = 2(\sqrt{a+1} + \sqrt{b-2} + \sqrt{c+1})$ ，求 $a^2 + b^2 + c^2$ 之值。

解

▣ [衛道中學]

設 x, y 均為實數，且 $x^2 + 4xy + 6y^2 - 6x - 16y + 11 = 0$ ，則數對 $(x, y) =$ _____。

答：(1, 1)

Topic 1-2

絕對值與數線