

主題 7 無理數

KAVY



1. 無理數

(1) 無理數的定義：

凡是實數中無法寫成 $\frac{q}{p}$ 的數則稱為無理數，其中 p, q 為整數且 $p \neq 0$ 。

(2) 無理數的類型：

無理數必可化成 。一般常見的圓周率 π 、自然常

數 e 、黃金比例 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 皆為無理數。

(3) 封閉性討論：

定義 $\oplus$ 為「加、減、乘、除」運算中的任一種運算且除法之除數不為 0。

① 有理數 $\oplus$ 有理數 = 有理數 (有理數對四則運算具封閉性)。

② 無理數 $\oplus$ 無理數 = 有理數或無理數 (無理數對四則運算不具封閉性)。

③ 有理數 $\oplus$ 無理數 = _____。

【說明】

無理數與無理數的加、減、乘、除可能為有理數：

$$\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0, \quad \sqrt{2} - \sqrt{2} = 0, \quad \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3, \quad \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1.$$

2. 無理數相關定理

(1) 定理一：

設 a, b 為有理數且 X 為無理數。若 $a = bX$ ，則 $a = b = 0$ 。

(2) 定理二：

已知 a, b, c, d 為有理數且 X 為無理數，若 $a + bX = c + dX$ ，則 $a = c, b = d$ 。

【說明】

$$a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2} \Rightarrow a - c = (d - b)\sqrt{2}$$

$$\text{由定理一可知 } a - c = d - b = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$$

【說例】

若 $a, b \in \mathbb{Q}$ 且 $a + b\sqrt{2} = 7 - 5\sqrt{2}$ ，則 $a = 7, b = -5$ 。

(3) 重要觀念：

- ① 已知 a, c 為有理數且 X, Y 為無理數，若 $a + X = c + Y$ ，則不一定 $a = c, X = Y$ 。
- ② 若 p 為質數，則 $\sqrt{p}$ 為無理數。
- ③ 若 a, b 皆為無理數，則 $a + b$ 與 $a - b$ 至少有一個無理數。
- ④ 若 $a + b$ 與 $a - b$ 皆為無理數，則 a, b 至少有一個無理數。

【說明 1】

在無理數舉例時，不要侷限於二次根式，可以試試 $\sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{5}, \dots$ 等等；也不必侷限於單一項的無理數，可以試試 $1 + \sqrt{2}, \sqrt{2} + \sqrt{3}, \dots$ 等等。

【說明 2】

例 1

已知 a, b 皆為實數，試問下列敘述何者正確？請選出來：

- (1) 一個有理數與一個無理數之積必為無理數
- (2) 若 $a+b$ 為有理數且 ab 為無理數，則 $a-b$ 為無理數
- (3) 存在兩個無理數 a, b 使得 $\frac{a}{b}$ 為無理數且 ab 為有理數。
- (4) 若 a^2 與 a^6 都是有理數，則 a 是有理數
- (5) 若 a^5 與 a^7 都是有理數，則 a 是有理數。

解

例 2

已知 $x^2 + px + q = 0$, $p, q \in \mathbb{Q}$, 若 $1 + \sqrt{2}$ 為其一根, 求 p, q 及另一根。

解 1° $\because 1 + \sqrt{2}$ 為有理係數方程式 $x^2 + px + q = 0$ 的一根
 $\therefore (1 + \sqrt{2})^2 + p(1 + \sqrt{2}) + q = 0 \Rightarrow (p + q + 3) + (p + 2)\sqrt{2} = 0$



例 3

若 $x, y \in \mathbb{Q}$ 且 $x\sqrt{3-2\sqrt{2}} + y\sqrt{17-12\sqrt{2}} = \sqrt{43-30\sqrt{2}}$ ，求 x 與 y 。

解

LGAM



例 4

設正實數 a 的小數部分是 b ，若已知 $a^2 + b^2 = 38$ ，求 a 與 b 之值。

解

DQHR



例 5

證明 $\sqrt{2}$ 是無理數。

證

例 6

已知 p, q 皆為無理數，試證明 $p+q, p-q$ 至少有一個無理數。

證 1° 令 $p+q, p-q$ 皆為有理數 [Step1 先否定結論]

2° 但 $p = \frac{(p+q)+(p-q)}{2}$ 為有理數 ($\frac{\text{有理數}+\text{有理數}}{\text{有理數}} = \text{有理數}$)

$$q = \frac{(p+q)-(p-q)}{2} \text{ 為有理數}$$

但題給「 p, q 皆為無理數」產生矛盾 [Step2 找到矛盾]

3° 由 1° 2° 可知假設錯誤，故 $p+q, p-q$ 至少有一個無理數。 [Step3 再扶正結論]

例 7

已知 $\sqrt{2}$ 是無理數，試證明 $\sqrt{2+\sqrt{2}}$ 是無理數。

證 1° 令 $x = \sqrt{2+\sqrt{2}}$ 且假設 x 為有理數 [Step1 先否定結論]

$$2^\circ \quad x^2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}^2 \Rightarrow x^2 = 2+\sqrt{2} \Rightarrow x^2 - 2 = \sqrt{2}$$

因為 x 為有理數且由有理數四則運算的封閉性可知 $x^2 - 2$ 亦為有理數，

但題給 $\sqrt{2}$ 是無理數，故 $x^2 - 2 = \sqrt{2}$ 矛盾 [Step2 找到矛盾]

3° 由 1° 2° 可知假設錯誤，故 $\sqrt{2+\sqrt{2}}$ 是無理數。 [Step3 再扶正結論]