

主題 6 有理數

SBHY



1. 有理數

(1) 有理數的定義：

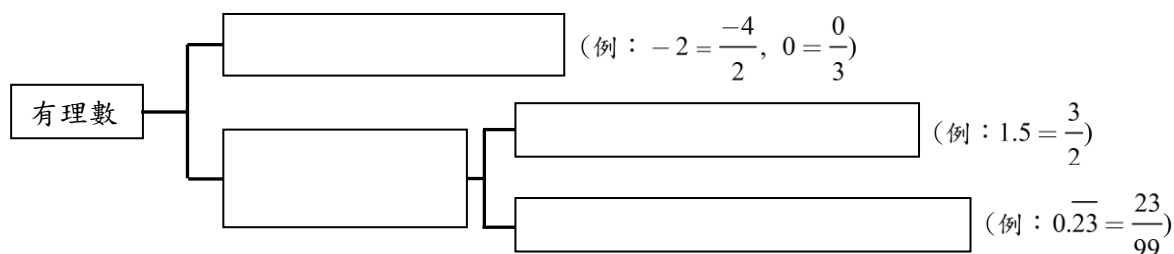
凡是可寫成_____型式且 $p, q \in \mathbb{Z}, p \neq 0$ ，這樣的數稱為有理數，常用記號_____表示有理數所形成的集合。

(2) 有理數的假設法：

由於任何有理數的表示法均不是唯一，故通常將有理數設為 $\frac{q}{p}$ ， $p, q \in \mathbb{Z}, p \neq 0$

且 以便於計算討論。

(3) 有理數的類型：



(4) 有限小數：

有理數中可化成有限小數者，其最簡分數的分母必為 。

(a, b 為正整數或 0)

【說明】

2. 有理數的性質

(1) 有理數的四則運算具封閉性：

兩個有理數相加、相減、相乘、相除 (分母 $\neq 0$)，其結果亦為有理數，此種現象，稱為有理數對加法、減法、乘法、除法具有 。

(2) 有理數具有稠密性 (denseness)：

兩相異有理數 a, b 之間 ($a < b$) 必存在另一有理數 x ，使得 $a < x < b$ 。此性質稱為有理數的 (density of rationals)。

(3) 整數的分散性：

若 a, b 為相異整數，則 $|a - b| \geq 1$ 或 ，此性質即整數的 或 。

例 1

將下列各循環小數化為最簡分數：

(1) $0.\bar{7}$ (2) $0.\bar{73}$ (3) $0.4\bar{56}$

解

NUFE



例 2

有一個既約分數 (最簡分數) 的分子與分母相差 7，將其化為小數並將小數點第二位四捨五入到得 0.5，求此既約分數。

解

LNXB



例 3

已知 $99999 = 9 \times 41 \times 271$ ，設小數 $a = \frac{17}{40} + \frac{2}{271}$ ，試問 a 化為小數後，小數點後第 2026 位數字為_____。

解

例 4

若將 $b = \frac{1357}{3300}$ 化成小數，令 a_n 表 b 的小數點後第 n 位數字，試求以下級數之和：

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + \cdots + (-1)^{n+1} a_n + \cdots + (-1)^{101} a_{100}。$$

解

例 5

已知 x, y 都是正整數，且 $x+y, x-y, xy, \frac{x}{y}$ 四數和為 504。求整數對 (x, y) 。

解