

主題 5 特殊方根的處理



1. 分母有理化

(1) 二次根式有理化：

$$\textcircled{1} \sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{\frac{b}{a} \times \frac{a}{a}} = \frac{\sqrt{ab}}{a} \quad (a > 0, b > 0)$$

$$\textcircled{2} \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b} \quad (a > 0, b > 0, a \neq b)$$

$$\textcircled{3} \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a - b} \quad (a > 0, b > 0, a \neq b)$$



(2) 三次根式有理化：[自行參考]

$$\textcircled{1} \sqrt[3]{\frac{b}{a}} = \sqrt[3]{\frac{b}{a} \times \frac{a^2}{a^2}} = \frac{\sqrt[3]{a^2b}}{a} \quad (a > 0, b > 0)$$

$$\textcircled{2} \frac{1}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}} \times \frac{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}} = \frac{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}{a + b} \quad (a > 0, b > 0)$$

$$\textcircled{3} \frac{1}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}} \times \frac{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}} = \frac{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}{a - b} \quad (a > 0, b > 0, a \neq b)$$

【說例】

三次根式和與三次根式差的分母有理化可由以下公式達成。

$$(x + y)(x^2 - xy + y^2) = x^3 + y^3, \quad (x - y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 - y^3$$

舉例來說：

$$(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2})(\quad) =$$

(3) 有理化技巧-交叉相乘：

對分母有理化之前，可先觀察是否易與有理化的結果採取交叉相乘，舉例來說：

由於 $(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})=1$ ，故 $\frac{1}{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}} = \sqrt{k+1}+\sqrt{k}$ ；

由於 $(\sqrt{k+2}+\sqrt{k})(\sqrt{k+2}-\sqrt{k})=2\times 1$ ，故 $\frac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k}} = \frac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k}}{2}$ 。

【說例】

① $\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{5}} =$

② $\frac{1}{\sqrt{13}-\sqrt{11}} =$

③ $\frac{1}{\sqrt{17}+\sqrt{15}} =$

3. 子母雙重根式

(1) 子母雙重根式：

① 平方和型： $\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}} =$ _____ ($a > 0, b > 0$)

② 平方差型： $\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}} =$ _____ ($a > 0, b > 0$)

【說明】

$$\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}} = \sqrt{(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 + 2\sqrt{a}\sqrt{b}} = \sqrt{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} = \sqrt{a}+\sqrt{b}$$

$$\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}} = \sqrt{(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b}} = \sqrt{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2} = |\sqrt{a}-\sqrt{b}|$$

【說例】

① $\sqrt{5+2\sqrt{6}} =$

② $\sqrt{17-12\sqrt{2}} =$

$$\textcircled{3} \sqrt{14+3\sqrt{20}} =$$

$$\textcircled{4} \sqrt{2+\sqrt{3}} =$$

(2) 共軛子母雙根號：

遇到 $\sqrt{a+\sqrt{b}} \pm \sqrt{a-\sqrt{b}}$ 型題目(其中 $a > b > 0$)，通常會以平方處理之。因為平方會造成 $(a+\sqrt{b})+(a-\sqrt{b})$ 及 $\sqrt{a+\sqrt{b}}\sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{a^2-b}$ 較好處理的結構。

【說例】

以下我們來說明 $\sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}}$ 是如何化簡成 $\sqrt{2}$ 的。

⇒ 以下還有幾組數據提供給同學練習：

$$\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}} = \sqrt{2}, \quad \sqrt{4+\sqrt{15}} - \sqrt{4-\sqrt{15}} = \sqrt{6}, \quad \sqrt{14+6\sqrt{5}} + \sqrt{14-6\sqrt{5}} = 6$$

型一 分母有理化

例 1

試將下列各式之分母有理化：

(1) $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$ (2) $\frac{1}{2-\sqrt[3]{3}}$

解

ZMBY



例 2

試將 $\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ 之分母有理化。

解

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$

例 3

化簡 $\frac{\sqrt{35} + \sqrt{21} + 5 + \sqrt{15}}{\sqrt{7} + 2\sqrt{5} + \sqrt{3}}$ 。

解

$$\frac{\sqrt{35} + \sqrt{21} + 5 + \sqrt{15}}{\sqrt{7} + 2\sqrt{5} + \sqrt{3}}$$

NSRM



型二 根式基本運算

例 4

化簡 $S = \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}}$ 之值。

解 $S = \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}}$

IJTH



例 5

已知 $x = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$, $y = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$, 求 $\sqrt{3x^2-5xy+3y^2}$ 之值。

解

型三 **$\sqrt{n+1} \pm \sqrt{n}$ 運算****例 6**

試比較下列各數的大小：

(1) $a = \sqrt{19} + \sqrt{21}$, $b = \sqrt{18} + \sqrt{22}$, $c = \sqrt{17} + \sqrt{23}$

(2) $x = \sqrt{20} - \sqrt{19}$, $y = \sqrt{19} - \sqrt{18}$, $z = \sqrt{18} - \sqrt{17}$

解

例 7

求滿足 $\sqrt{n} - \sqrt{n-1} < 0.01$ 之最小正整數 n 。

解

型四 多重根式的處理

例 8

各校重要考題

若 $\sqrt{11+6\sqrt{2}}$ 的整數部分為 a ，小數部分為 b ，則 $\frac{1}{b} - \frac{7}{a+b} =$ _____。

解 1° $\sqrt{11+6\sqrt{2}} = \sqrt{11+2\sqrt{18}} = \sqrt{9} + \sqrt{2} = 3 + \sqrt{2}$

整數部分為 $a =$ _____，小數部分為 $b =$ _____

2° $\frac{1}{b} - \frac{7}{a+b} =$ _____

STHW



例 9

有多少正整數 x 使得 $\sqrt{51-\sqrt{x}}$ 為整數？

解

證明 $\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+5\sqrt{1+6\sqrt{1+\cdots}}}}}} = 3$ 。

證 $1^\circ \quad 3 = \sqrt{9} = \sqrt{1+8} = \sqrt{1+2 \cdot 4} = \sqrt{1+2\sqrt{16}} = \sqrt{1+2\sqrt{1+15}} = \sqrt{1+2\sqrt{1+3 \cdot 5}}$
 $= \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{25}}} = \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+24}}} = \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4 \cdot 6}}}$
 $= \dots\dots\dots$

2° 為了說明是 1° 中的式子是可以繼續拆解下去的，我們必須證明：

$$\sqrt{1+n\sqrt{(n+2)^2}} = \sqrt{1+n\sqrt{1+(n+1)\sqrt{(n+3)^2}}}.$$

$$\begin{aligned} \text{左式} &= \sqrt{1+n\sqrt{(n+2)^2}} = \sqrt{1+n\sqrt{n^2+4n+4}} = \sqrt{1+n\sqrt{1+(n^2+4n+3)}} \\ &= \sqrt{1+n\sqrt{1+(n+1)(n+3)}} = \sqrt{1+n\sqrt{1+(n+1)\sqrt{(n+3)^2}}} = \text{右式} \end{aligned}$$

3° 由 $1^\circ 2^\circ$ 可知原式成立

證明實數 $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$ 為一個有理數。

解 $1^\circ \quad \text{令 } x = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$
 $\Rightarrow x^3 = (\sqrt[3]{\sqrt{5}+2})^3 - (\sqrt[3]{\sqrt{5}-2})^3 - 3(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2})(\sqrt[3]{\sqrt{5}-2})(\underbrace{\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}}_{=x})$

$$\Rightarrow x^3 = 4 - 3(1)x \Rightarrow x^3 + 3x - 4 = 0$$

$2^\circ \quad x^3 + 3x - 4 = 0 \Rightarrow (x-1)(x^2 + x + 4) = 0$ [係數總和為 0，必有因式 $x-1$]

$$\because x^2 + x + 4 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \therefore x^2 + x + 4 = 0 \text{ 無實根}$$

故 $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2} = 1$ 為一個有理數

型五 根式估計

例 12

設 $a = \sqrt{6 + \sqrt{35}}$ ，試回答下列問題：

- (1) 若 a 介在連續整數 k 和 $k+1$ 之間，求 k 。
- (2) 若 $a + \frac{1}{a}$ 介在連續整數 n 和 $n+1$ 之間，求 n 。

解

例 13

求滿足 $\frac{n}{2} < \sqrt{9+\sqrt{50}} < \frac{n+1}{2}$ 的整數 n 值。

解

▣ 【台中一中】

化簡 $\sqrt{8+\sqrt{40+8\sqrt{5}}} + \sqrt{8-\sqrt{40+8\sqrt{5}}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答： $\sqrt{10} + \sqrt{2}$

▣ 【挑戰題】

已知方程式 $x + \sqrt{x + \frac{1}{2}} + \sqrt{x + \frac{1}{4}} = 1024$ ，求實數 x 之值。

答：992