

主題 2 乘法公式

ZGEZ



1. 國中基本公式

(1) 平方差：

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

(2) 和平方：

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 =$$

(2) 差平方：

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 =$$

【說明】

兩變數 a, b 的乘法公式最主要是訓練和、差、積，即 $a+b$, $a-b$, ab 來表現結構。

【說例】

$$3x^2 - 4xy + 3y^2 =$$

2. 多項和的平方公式

(1) 二項和的平方：

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2(ab)$$

(2) 三項和的平方：

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca)$$

(3) 四項和的平方：

$$(a+b+c+d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(\quad)$$

【説明】

	a	b
a		
b		

	a	b	c
a			
b			
c			

	a	b	c	d
a	a^2			
b		b^2		
c			c^2	
d				d^2

(4) 多項和的平方：

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 =$$

3. 三組平方和的公式

(1) 三組平方和的公式：

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca =$$

$$=$$

【説明】

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca &= \frac{1}{2}(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca) \\ &= \frac{1}{2}[(a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2ca + a^2)] \\ &= \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] \end{aligned}$$

(2) 公式應用：

① 若 a, b, c 為不完全相同之實數，則 $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca > 0$ 。

② 若 a, b, c 皆為實數，且 $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$ ，則 $a = b = c$ 。

4. 巴斯卡三角形與二項式展開係數

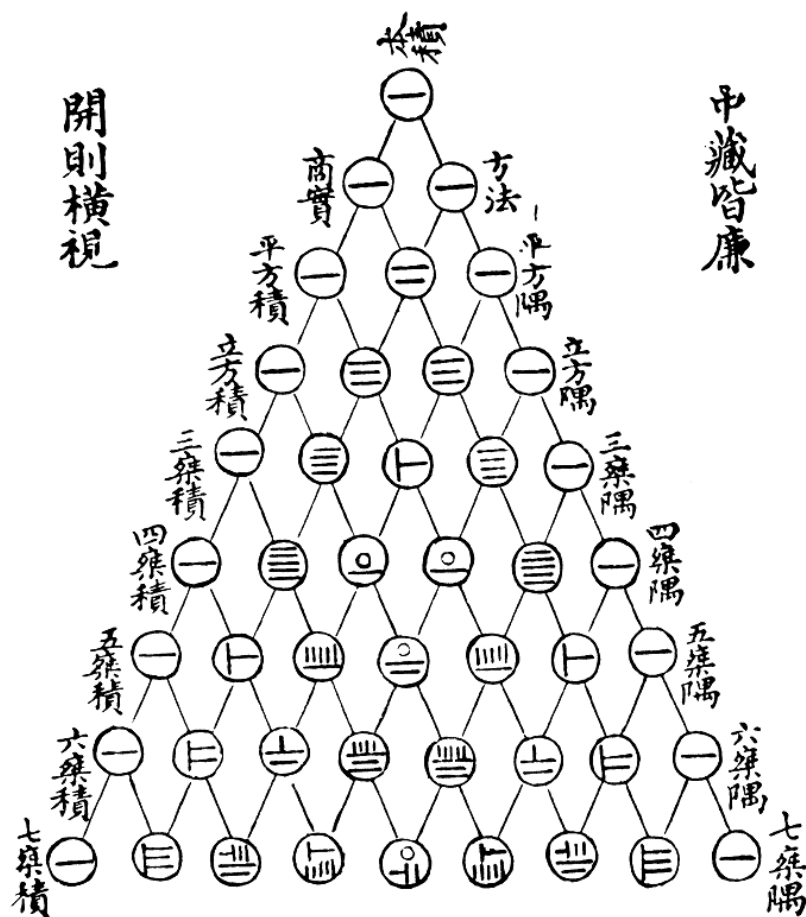
BVFF



(1) 巴斯卡三角形：

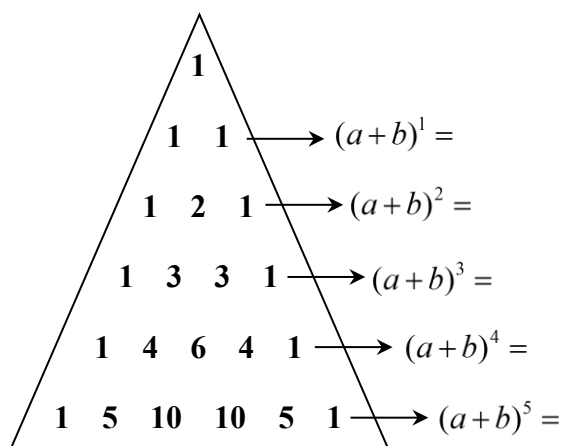
約莫西元 1303 年，中國的元代的朱世傑在其所著的《四元玉鑑》卷首繪製《古法七乘方圖》。獨立發現此規律的數學家非常多，現今最早可溯自十世紀的波斯數學家 Al-Karaji。

古法七乘方圖



本積	方法	上廉	二廉	三廉	四廉	五廉	六廉	七廉
----	----	----	----	----	----	----	----	----

(2) 二項式展開係數：



(3) 高次常用公式：

① 完全三次方：
$$\begin{cases} (x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \\ (x-y)^3 = \end{cases}$$

② 完全四次方：
$$\begin{cases} (x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 \\ (x-y)^4 = \end{cases}$$

③ 完全五次方：
$$\begin{cases} (x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5 \\ (x-y)^5 = \end{cases}$$

2. 立方公式

(1) 立方公式整理：

① 和立方：
$$(a+b)^3 = \boxed{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3} \quad \text{二項式展開}$$

$$= \boxed{a^3 + b^3 + 3ab(a+b)} \quad \text{和差積結構}$$

② 立方和：
$$a^3 + b^3 = \boxed{(a+b)^3 - 3ab(a+b)} \quad \text{和差積結構}$$

$$= \boxed{(a+b)(a^2 - ab + b^2)} \quad \text{因式分解}$$

$$\begin{aligned}\textcircled{3} \text{ 差立方： } (a-b)^3 &= \boxed{a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3} \quad \text{二項式展開} \\ &= \boxed{a^3 - b^3 - 3ab(a-b)} \quad \text{和差積結構}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\textcircled{4} \text{ 立方差： } a^3 - b^3 &= \boxed{(a-b)^3 + 3ab(a-b)} \quad \text{和差積結構} \\ &= \boxed{(a-b)(a^2 + ab + b^2)} \quad \text{因式分解}\end{aligned}$$

(2) 多項式常用表達：

$$\textcircled{1} \text{ 和立方： } (x+1)^3 =$$

$$\textcircled{2} \text{ 差立方： } (x-1)^3 =$$

$$\textcircled{3} \text{ 立方和： } x^3 + 1 =$$

$$\textcircled{4} \text{ 立方差： } x^3 - 1 =$$

型一 平方公式

例 1

化簡 $\frac{3^2}{3^2-1} \times \frac{4^2}{4^2-1} \times \frac{5^2}{5^2-1} \times \cdots \times \frac{32^2}{32^2-1}$ 之值。

解 $\frac{3^2}{3^2-1} \times \frac{4^2}{4^2-1} \times \frac{5^2}{5^2-1} \times \cdots \times \frac{32^2}{32^2-1}$

QMXG



▣ 沃利斯乘積 (The Wallis product for π)

數學家 John Wallis 在 1655 年發現了以下這個公式：

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)^2}{(2k)^2-1} = \frac{2^2}{2^2-1} \times \frac{4^2}{4^2-1} \times \frac{6^2}{6^2-1} \times \frac{8^2}{8^2-1} \times \cdots = \frac{\pi}{2}.$$

結構與例題 1 相當雷同。

例 2

求 $\sqrt{95 \times 99 \times 101 \times 105 + 144}$ 之值。

解

$$\sqrt{95 \times 99 \times 101 \times 105 + 144}$$

EIYJ



例 3

若已知 $0 < x < 1$ ，試化簡 $\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2} + 2} - \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2} - 2}$ 。

解

VWLP



▣ [建國中學]

已知 n 為自然數，且 $\sqrt{n + \frac{1}{n} + 2} - \sqrt{n + \frac{1}{n} - 2} < \frac{1}{10}$ ，則 n 的最小值為_____。

答：401

例 4

已知 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$ ， $a + b + c = \sqrt{5}$ ，求 $a^2 + b^2 + c^2$ 之值。

解

例 5

已知 $a-b=1+\sqrt{3}-\sqrt{2}$, $b-c=1-\sqrt{3}+\sqrt{2}$, 求 $(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)$ 之值。

解

$$\begin{aligned}
 & (a+b+c)^2-3(ab+bc+ca) \\
 &= a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca \\
 &= \frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2] \\
 &= \frac{1}{2}[(1+\sqrt{3}-\sqrt{2})^2+(1-\sqrt{3}+\sqrt{2})^2+(-2)^2] \\
 &= \frac{1}{2}[(1+3+2+2\sqrt{3}-2\sqrt{6}-2\sqrt{2})+(1+3+2-2\sqrt{3}-2\sqrt{6}+2\sqrt{2})+(4)] \\
 &= 8-2\sqrt{6}
 \end{aligned}$$

例 6

競賽資優試題

已知函數 $f(x)=(1+x)(1+x^4)(1+x^{16})(1+x^{64})\cdots$, 若 $f(\frac{3}{8}) \cdot f(a) = \frac{8}{5}$, 求 a 之值。

解

$$1^\circ \quad f(x^2) = (1+x^2)(1+x^8)(1+x^{32})\cdots$$

$$2^\circ \quad f(x) \cdot f(x^2) = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\cdots$$

$$= \frac{(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\cdots}{1-x} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1-x^t}{1-x} \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$3^\circ \quad \text{令 } x = \frac{3}{8} \text{ 代入 } \textcircled{1} \text{ 得 } f(\frac{3}{8}) \cdot f(\frac{9}{64}) = \frac{1}{1-\frac{3}{8}} = \frac{8}{5}, \text{ 故 } a = \frac{9}{64}$$

[當 $0 < x < 1$ 且 t 趨近於無窮大時, x^t 趨近於 0]



型二**高次公式****例 7**

若已知 $a+b=5$, $ab=3$ ，試求下列各式之值：

(1) a^2+b^2

(2) $a-b$

(3) a^3+b^3

(4) a^4+b^4

(5) a^5+b^5

解

QRSY



例 8

因式分解 $a^6 - 64b^6$ 。

解 $a^6 - 64b^6$

▣ [挑戰題]

已知 a, b 皆為實數且 $\begin{cases} a^3 - 3ab^2 = -2 \\ b^3 - 3a^2b = -11 \end{cases}$ ，求 $a^2 + b^2$ 之值。

答：5

例 9

若已知 $x^2 - 3x + 1 = 0$ ，試求下列各式之值：

(1) $x^2 + \frac{1}{x^2}$ (2) $x^3 + \frac{1}{x^3}$ (3) $x^5 + \frac{1}{x^5}$ (4) $x^6 + \frac{1}{x^6}$

技巧訓練

若方程式有係數對稱結構，則_____。

解 $x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow$

(1) $x^2 + \frac{1}{x^2} =$

(2) $x^3 + \frac{1}{x^3} =$

(3) $x^5 + \frac{1}{x^5} =$

(4) $x^6 + \frac{1}{x^6} = (x^3 + \frac{1}{x^3})^2 - 2 \cdot x^3 \cdot \frac{1}{x^3} = (18)^2 - 2 = 322$

UUH



例 10

若 $\frac{x}{x^2+x+1} = \frac{1}{5}$ ，求 $\frac{x^3}{x^6+x^3+1}$ 之值。

解 1° $\frac{x}{x^2+x+1} = \frac{1}{5} \Rightarrow$

2° $\frac{x^3}{x^6+x^3+1} =$

例 11

請利用 $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ 與 $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ ，估計 $(3+\sqrt{7})^3$ 介於哪兩個整數之間，即 $n < (3+\sqrt{7})^3 < n+1$ ，其中 n 為正整數。

解 【法一】

1° $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

+) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$(a+b)^3 + (a-b)^3 = 2a^3 + 6ab^2 \dots\dots\dots \textcircled{1}$

2° 令 $a=3$, $b=\sqrt{7}$ 代入 $\textcircled{1}$ 得 $(3+\sqrt{7})^3 + (3-\sqrt{7})^3 = 2 \cdot 3^3 + 6 \cdot 3 \cdot 7 = 180$

3° $\because 0 < 3-\sqrt{7} < 1 \Rightarrow 0 < (3-\sqrt{7})^3 < 1$

$\therefore 179 < (3+\sqrt{7})^3 < 180$ ，故 $n=179$

【法二】

1° 令 $x=3+\sqrt{7}$, $y=3-\sqrt{7} \Rightarrow x+y=6$, $xy=2$

2° $x^3+y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) = 216 - 3 \cdot 2 \cdot 6 = 180$

$\because 0 < y < 1 \Rightarrow 0 < y^3 < 1$

$\therefore 179 < x^3 < 180$ ，故 $n=179$

$\frac{30^3+29^3}{30^3+1^3} + \frac{29^3+27^3}{29^3+2^3} + \frac{28^3+25^3}{28^3+3^3} + \cdots + \frac{17^3+3^3}{17^3+14^3} + \frac{16^3+1^3}{16^3+15^3}$ 之值為_____。

解 原式 = $\frac{30^3+1^3+29^3-1^3}{30^3+1^3} + \frac{29^3+2^3+27^3-2^3}{29^3+2^3} + \cdots + \frac{17^3+14^3+3^3-14^3}{17^3+14^3} + \frac{16^3+15^3+1^3-15^3}{16^3+15^3}$

$$= (1 + \frac{29^3-1^3}{30^3+1^3}) + (1 + \frac{27^3-2^3}{29^3+2^3}) + \cdots + (1 + \frac{3^3-14^3}{17^3+14^3}) + (1 + \frac{1^3-15^3}{16^3+15^3})$$

$$= 15 + \frac{(29-1)(29^2+29 \cdot 1+1^2)}{(30+1)(30^2-30 \cdot 1+1^2)} + \frac{(27-2)(27^2+27 \cdot 2+2^2)}{(29+2)(29^2-29 \cdot 2+2^2)} + \cdots + \frac{(1-15)(1^2+1 \cdot 15+15^2)}{(16+15)(16^2-16 \cdot 15+15^2)}$$

$$= 15 + \frac{(29-1)\cancel{(29 \times 30+1)}}{(30+1)\cancel{(29 \times 30+1)}} + \frac{(27-2)\cancel{(27 \times 29+4)}}{(29+2)\cancel{(27 \times 29+4)}} + \cdots + \frac{(1-15)\cancel{(1 \times 16+225)}}{(16+15)\cancel{(1 \times 16+225)}}$$

$$= 15 + \frac{28}{31} + \frac{25}{31} + \cdots + \frac{-11}{31} + \frac{-14}{31}$$

$$= 15 + \frac{1}{31} \cdot \frac{(28-14) \times 15}{2} = \frac{570}{31}$$

▣ 【挑戰題】

試解方程式 $\frac{111}{x} + \frac{111}{x^2} - \frac{11}{x^3} = 11$ 。

答：-1, $\frac{1}{11}$, 11

主題 3 因式分解

1. 特殊四次多項式之因式分解

(1) 四連乘型四次多項式：

型如 $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)+e$ 的因式分解，通常會先將四個一次式作重新配對之後，再做十字交乘的逆運算。

【說例】

$$\begin{aligned} & (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-8 \\ &= [(x+1)(x+4)][(x+2)(x+3)]-8 \quad \text{[配對]} \\ &= (x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-8 \quad \text{[視 } x^2+5x \text{ 為一個新單位]} \\ &= (x^2+5x)^2+10(x^2+5x)+16 \quad \text{[再做十字交乘因式分解]} \\ &= (x^2+5x+8)(x^2+5x+2) \quad \text{[有理係數下的分解]} \end{aligned}$$

(2) 偶次式型四次多項式：

若多項式格式為四次、二次、常數，一般先注意可否直接十字交乘分解，例如

$$x^4-3x^2+2=(x^2-1)(x^2-2)$$

$$\begin{array}{cc} x^2 & -1 \\ & \times \\ x^2 & -2 \end{array}$$

。或是否可以先湊完全平方式，再增補項造成平方差。以下是兩個常見的公式：

$$\textcircled{1} \quad x^4+x^2+1=(x^2-x+1)(x^2+x+1)$$

$$\textcircled{2} \quad x^4+4=(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)$$

【說明】

① $x^4 + x^2 + 1 =$

②

2. 二變元多項式之因式分解

(1) 二變元分解：

$(1+x)(1+y) =$

(2) 三變元分解：

$(1+x)(1+y)(1+z) =$

(3) 強迫分解結構：

【說明】

看見題目中的算式有兩變數 x, y 並以 xy, x, y 的型態加減組合，可以試著用這個方式拆解。

【說例 1】

$$xy + 3x - 2y - 6 =$$

【說例 2】

$$xy + 5x + 4y + 19 =$$

型一 四連乘型四次多項式

例 1

試因式分解 $(x^2 + 2x + 4)(x^2 + 2x - 6) + 21$ 。

解 $(x^2 + 2x + 4)(x^2 + 2x - 6) + 21$

SWVA



例 2

試因式分解 $(x^2 + 3x + 2)(x^2 + 7x + 12) - 3$ 。

解 $(x^2 + 3x + 2)(x^2 + 7x + 12) - 3$

SWVA



型二 偶次式型四次多項式

例 3

因式分解 $x^4 - 27x^2 + 1$ 。

解

例 4

競賽資優試題

計算 $\frac{(2^4 + \frac{1}{4})(4^4 + \frac{1}{4})(6^4 + \frac{1}{4})(8^4 + \frac{1}{4})(10^4 + \frac{1}{4})}{(1^4 + \frac{1}{4})(3^4 + \frac{1}{4})(5^4 + \frac{1}{4})(7^4 + \frac{1}{4})(9^4 + \frac{1}{4})} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解 1° 原式 = $\frac{(4 \cdot 2^4 + 1)(4 \cdot 4^4 + 1)(4 \cdot 6^4 + 1)(4 \cdot 8^4 + 1)(4 \cdot 10^4 + 1)}{(4 \cdot 1^4 + 1)(4 \cdot 3^4 + 1)(4 \cdot 5^4 + 1)(4 \cdot 7^4 + 1)(4 \cdot 9^4 + 1)}$

2° $4x^4 + 1 = (4x^4 + 4x^2 + 1) - 4x^2 = (2x^2 + 1)^2 - (2x)^2$
 $= (2x^2 - 2x + 1)(2x^2 + 2x + 1) = [2(\underline{x-1})x + 1][2x(\underline{x+1}) + 1]$

3° 利用上式之分解可得

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \frac{[2(1 \times 2) + 1][2(2 \times 3) + 1] \cdot [2(3 \times 4) + 1][2(4 \times 5) + 1] \cdots [2(9 \times 10) + 1][2(10 \times 11) + 1]}{[2(0 \times 1) + 1][2(1 \times 2) + 1] \cdot [2(2 \times 3) + 1][2(3 \times 4) + 1] \cdots [2(8 \times 9) + 1][2(9 \times 10) + 1]} \\ &= \frac{2(10 \times 11) + 1}{2(0 \times 1) + 1} = 221\end{aligned}$$

例 5

已知 n 為整數，且 $P = n^4 - 6n^2 + 25$ 為一質數，求 n 與此質數 P 。

解

NSWC



型三 二變元強迫分解型

例 6

設 x, y 皆為正整數且 $x > y$, $xy + x + y = 54$ ，試解整數對 (x, y) 。

解

例 7

設 x, y 皆為正整數且 $\frac{5}{x} + \frac{4}{y} = 3$ ，試解整數對 (x, y) 。

解

EPEJ



型四 平方差拆解型

例 8

設 x 與 $\sqrt{x^2 + 71}$ 皆為正整數，試求 x 之值。

解

FWGB



▣ [挑戰題]

低年級的小立只會加法與減法，他正在解一道等差級數的問題： $1+2+3+\cdots+39+40$ 。
由於他在中間有一段連續的加法全都不小心寫成減號，例如：

$$1+2+3+4+5 -6-7-8-9-10-11-12 +13+14+15+\cdots+39+40。$$

已知小立有一段連續的加法全部寫成減法後，他的計算結果總和為 0。若他的加減法都沒有計算錯，試問他至少從哪個數字開始寫成減號？

答：11

設 n 為正整數，且若 $n^2 + 3n + 11$ 為兩相鄰正奇數的乘積，試求 n 之值。

解

2025^年 陳立教育

[單 一 年 度]

唯有陳立絕不混榜亂真 ★ 只有最好才能成就更好

姓名	就讀高中	錄取校系	姓名	就讀高中	錄取校系	姓名	就讀高中	錄取校系
朱○辰	建國中學	臺大 醫學系	徐○彤	復旦高中	臺大 化學工程學系	許○鈞	成功高中	臺大 動物科學技術學系
吳○聰	延平中學	臺大 電機工程學系	許 ○	政大附中	臺大 化學系	鄭○嘉	中山女中	臺大 外國語文學系
吳○諭	台南一中	臺大 電機工程學系	林○萱	北一女中	臺大 化學系	蘇○帆	松山高中	臺大 外國語文學系
林○羽	建國中學	臺大 電機工程學系	劉○滢	中山女中	臺大 化學系	陳○允	北一女中	臺大 中國文學系
李 ○	建國中學	臺大 電機工程學系	薛○豪	板橋高中	臺大 化學系	鄭 ○	曉明女中	臺大 中國文學系
錢○澤	建國中學	臺大 法律學系	戴○文	建國中學	臺大 機械工程學系	林○緯	松山高中	臺大 日本語文學系
彭○榆	台中女中	臺大 法律學系	詹○宇	建國中學	臺大 機械工程學系	汪○瑜	中山女中	臺大 人類學系
謝○臻	中山女中	臺大 法律學系	陳○廷	衛道中學	臺大 物理學系	江○穎	板橋高中	臺大 政治學系
吳○靜	中山女中	臺大 法律學系	李○婕	北一女中	臺大 工商管理學系	塗○茵	中山女中	臺大 哲學系
廖○程	海山高中	臺大 法律學系	林○珊	北一女中	臺大 公共衛生學系	張○榆	中壢高中	臺大 哲學系
陳○新	帥大附中	臺大 財務金融學系	劉○凱	內湖高中	臺大 生化科技學系	徐○喬	市立大同	臺大 歷史學系
吳○諾	北一女中	臺大 財務金融學系	劉○睿	南山高中	臺大 生化科技學系	朱○昱	板橋高中	臺大 歷史學系
申○任	建國中學	臺大 財務金融學系	李○紘	松山高中	臺大 生命科學系	薛○潔	民德國中	臺大 歷史學系
陳○昂	建國中學	臺大 財務金融學系	丁 ○	建國中學	臺大 生物產業傳播暨發展	蔡○芯	北一女中	臺大 心理學系
陳○臻	板橋高中	臺大 財務金融學系	馬○安	政大附中	臺大 生物產業傳播暨發展	鍾○閔	師大附中	臺大 數學系
陳○煒	衛道中學	臺大 財務金融學系	陳○瑜	中山女中	臺大 生物產業傳播暨發展	鄭○佑	台中二中	臺大 數學系
張○宜	建興國中	臺大 財務金融學系	洪○盈	中山女中	臺大 生物產業傳播暨發展	曾○升	台中一中	臺大 數學系
林○霆	成功高中	臺大 國際企業學系	邵○恩	市立大同	臺大 生物產業傳播暨發展	蔡○宸	市立大同	臺大 園藝暨景觀學系
游○翔	海山高中	臺大 國際企業學系	傅○愛	成淵高中	臺大 生物產業傳播暨發展	楊○佑	松山高中	臺大 園藝暨景觀學系
黃○珪	薇閣高中	臺大 國際企業學系	岑○融	建國中學	臺大 生物機電工程學系	劉○圓	北一女中	臺大 會計學系
蔡○恩	建國中學	臺大 國際企業學系	許○豪	和平高中	臺大 生物環境系統工程	張○勻	北一女中	臺大 會計學系
劉○豪	台中一中	臺大 國際企業學系	蔡○宇	建國中學	臺大 生物環境系統工程	陳○安	市立大同	臺大 會計學系
黃○躍	建國中學	臺大 資訊工程學系	謝○騏	建國中學	臺大 地理環境資源學系	李○晴	師大附中	臺大 會計學系
黃○綸	成功高中	臺大 資訊工程學系	劉○洋	建國中學	臺大 地質科學系	陳○瑄	北一女中	臺大 會計學系
祝○棟	建國中學	臺大 資訊工程學系	黃○熊	松山高中	臺大 地質科學系	盧○君	北一女中	臺大 會計學系
莊○儒	北一女中	臺大 電子工程學系	徐○鈞	台南一中	臺大 地質科學系	郭○倫	師大附中	臺大 經濟學系
楊○彬	師大附中	臺大 土木工程學系	洪○鈞	台南一中	臺大 工程科學及海洋工程	王○澤	師大附中	臺大 經濟學系
鍾○珪	中山女高	臺大 土木工程學系	蔡○鎔	建國中學	臺大 材料科學與工程學系	張○誌	建國中學	臺大 經濟學系
邱○榆	中壢高中	臺大 土木工程學系	魏○恩	南山高中	臺大 材料科學與工程學系	陳○瑋	成功高中	臺大 經濟學系
賴○澄	建國中學	臺大 化學工程學系	侯○憲	建國中學	臺大 昆蟲學系	楊○曄	台中一中	臺大 經濟學系
林○翰	建國中學	臺大 化學工程學系	李○億	台中二中	臺大 昆蟲學系	賴○安	建國中學	臺大 資訊管理學系

陳立既出 誰與爭鋒 ★ 各類榜首 盡在陳立

頂尖大學風雲榜

臺大、清大、陽交大、成大、政大 ★ Part 1

姓名	就讀高中	錄取校系	姓名	就讀高中	錄取校系	姓名	就讀高中	錄取校系
陳○祐	建國中學	臺大 資訊管理學系	吳○呈	建國中學	清大 原子科學院	李○瑩	台南女中	清大 藝術學院
陳○安	百齡高中	臺大 資訊管理學系	蕭○家	中壢高中	清大 材料科學工程學系	蔡○蓁	華盛頓中學	清大 藝術學院
張○豐	恆毅中學	臺大 農業經濟學系	游○宸	成功高中	清大 材料科學工程學系	林○佑	台中一中	清大 旭日招生丙組
黃○嘉	海山高中	臺大 農業經濟學系	劉○均	私立復興	清大 資訊工程學系	陳○芹	北一女中	陽交大 牙醫學系
林○宣	建國中學	臺大 農藝學系	許○佑	板橋高中	清大 生命科學系	任○佑	龜大附中	陽交大 中醫學系
魏○勲	海山高中	臺大 農藝學系	王○真	台南女中	清大 生命科學系	蔡○陽	建國中學	陽交大 電機工程學系
鄭○呈	師大附中	臺大 森林環境暨資源	張○洋	武陵高中	清大 生醫工程與環境科學	李○澄	南山高中	陽交大 電機工程學系
黃○綸	政大附中	臺大 植物病理與微生物	莊○勛	建國中學	清大 生醫工程與環境科學	潘○寧	建國中學	陽交大 電機工程學系
陳○融	北一女中	臺大 植物病理與微生物	謝○宇	華江高中	清大 生醫工程與環境科學	葉○恩	建國中學	陽交大 資訊工程學系
江○音	海山高中	臺大 圖書資訊學系	黃○翰	師大附中	清大 數學系	董○辰	建國中學	陽交大 資訊工程學系
古○廷	建國中學	臺大 醫學工程學系	陳○宏	板橋高中	清大 經濟學系	莊○銓	新民高中	陽交大 資訊工程學系
楊○語	中山女高	臺大 醫學檢驗暨生物技術	段○宸	海山高中	清大 經濟學系	梁○益	武陵高中	陽交大 資訊工程學系
莊○續	台中女中	臺大 醫學檢驗暨生物技術	林○媛	忠明高中	清大 經濟學系	陳○羽	台南女中	陽交大 資訊工程學系
魏○道	北一女中	臺大 醫學檢驗暨生物技術	田○榕	北一女中	清大 經濟學系	郭○佑	成功高中	陽交大 機械工程學系
王○寧	東山中學	臺大 獸醫學系	丁○昕	北一女中	清大 經濟學系	葉○邦	成功高中	陽交大 機械工程學系
王○文	建國中學	臺大 獸醫學系	劉○旺	市立大同	清大 計量財務金融學系	林○丞	成功高中	陽交大 機械工程學系
王○廉	建國中學	臺大 藥學系	許○勲	北一女中	清大 中國文學系	關○嫻	裕德中學	陽交大 機械工程學系
鄭○媛	北一女中	臺大 藥學系	包○瑄	中和高中	清大 中國文學系	黃○郡	建國中學	陽交大 機械工程學系
楊○宇	南山中學	臺大 藥學系	詹○婷	華僑高中	清大 中國文學系	李○宥	中壢高中	陽交大 機械工程學系
田○鉉	台南一中	臺大 護理學系	趙○靜	聖心女中	清大 英語教學系	洪○泰	後甲國中	陽交大 機械工程學系
黃○瑜	台中一中	清大 電機工程學系	李○嫣	師大附中	清大 教育心理與諮商	林○程	後甲國中	陽交大 機械工程學系
林○	成功高中	清大 電機資訊學院	陳○棋	中壢高中	清大 教育心理與諮商	卓○辰	平鎮高中	陽交大 電子物理學系
陳○勲	興國國中	清大 電機資訊學院	林○成	北大高中	清大 教育與學習科技	李○澤	成功高中	陽交大 電子物理學系
鄭○安	中山女中	清大 工業工程與工程管理	吳○諱	板橋高中	清大 教育與學習科技	歐○騫	台南一中	陽交大 半導體工程學系
施○信	民德國中	清大 工學院	何○萱	政大附中	清大 教育與學習科技	林○美	南科實中	陽交大 土木工程學系
賴○廷	南山高中	清大 化學工程學系	曾○瑀	中壢高中	清大 教育與學習科技	李○澤	後甲國中	陽交大 材料科學與工程
陳○睿	復興國中	清大 化學工程學系	方○文	中和高中	清大 幼兒教育學系	張○馨	松山高中	陽交大 工業工程與管理
孫○妤	新竹女中	清大 化學系	鄭○妍	北一女中	清大 人文社會學院	張○恩	平鎮高中	陽交大 工業工程與管理
蔡○宇	台南一中	清大 化學系	陳○璟	北大高中	清大 人文社會學院	 因為有你 陳立才能更好！		
王○維	南山高中	清大 化學系	林○穎	北一女中	清大 人文社會學院			
何○瑋	中山女高	清大 化學系	莊○榛	政大附中	清大 藝術學院			

全國最大 ★ 最專業的連鎖 K12 教育集團

主題 4 平方根與高次方根



《 《 < < < 《 《 《 《 《 < < < < 《 《 《 < <

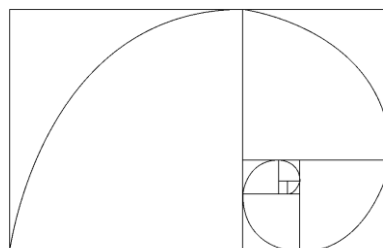
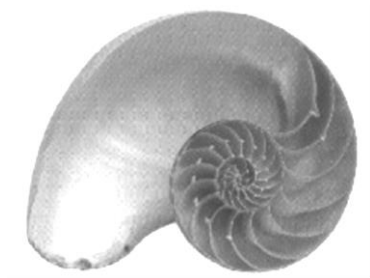
1. 黃金分割

(1) 黃金分割的意義：

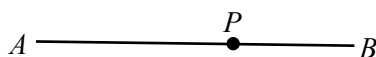
數學家歐幾里得在其所著《幾何原本》一書當中，提出他的論點：如果在一條線段上找出一個點，將這條線段分成長、短兩段，使得

「全段長：長邊的長＝長邊的長：短邊的長」

，那麼，這種分割方式就叫作黃金分割。



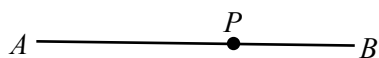
(2) 黃金比例：



若 P 為線段 $\overline{AB}$ 上一點且 $\overline{PA} > \overline{PB}$ ，若滿足 $\frac{\overline{AB}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$ (黃金分割) 時，我們稱此比值

$\frac{\overline{AB}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} =$ 為黃金比例，其中此值約為 。

【證明】



UFET



2. 方根概念

(1) 代數學基本定理：

n 次多項式方程式必定會有 n 個根，包含實根與虛根 (虛根為高三課程範圍)。

(2) 方根表示法：

① $x^2 = 5$ 的實數平方根為_____，可記為_____。

② $x^3 = 7$ 的實數立方根為_____，可記為_____。

③ $x^5 = 8$ 的實數五次方根為_____，可記為_____。

【說明】

3. 方根運算

(1) 偶次方根：

設 a 為任意實數且 n 為偶數，則 $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ 。

(2) 奇次方根：

設 a 為任意正實數且 n 為奇數，則 $\sqrt[n]{a^n} = a$ 。 [高中只討論正底數的奇次方根]

【說例 1】

$$\sqrt[4]{(-2)^4} = \underline{\hspace{2cm}}$$

【說例 2】

$$\sqrt[3]{5^3} = \underline{\hspace{2cm}}$$

(3) 同類方根的加減運算：

同次根號內的被開方數相同，則稱為**同類方根**，而同類根號的加減，即是把根號前的係數相加。

【說例】

$$2\sqrt[3]{3} + 5\sqrt[3]{3} = 7\sqrt[3]{3}$$

(4) 同次方根內的乘除運算：

同次根號的實數乘除運算，可在根號內合併乘除運算。

【說例】

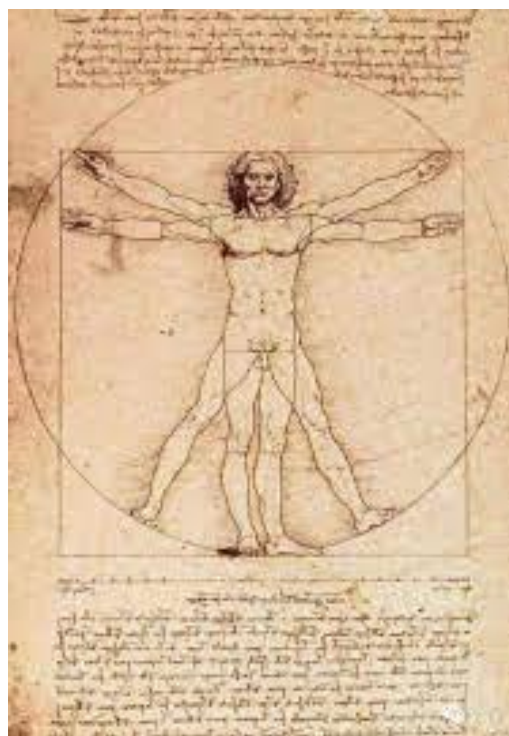
$$\frac{\sqrt[3]{81} \times \sqrt[3]{32}}{\sqrt[3]{6}} =$$

型一 黃金比例

例 1

古希臘人認為身材的比例如果滿足 $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{PA}} = \phi$ (A 為腳底， P 為肚臍， B 為頭頂)，則是最美的身材比例，這個比例值 ϕ 稱為黃金比例，如果小立身高為 150 公分，他的肚臍到腳底為 90 公分，如果想要達成看起來是黃金比例，則試問小立要穿多高的鞋子？
(試用計算機操作並四捨五入至小數點以下第 2 位)

解



達文西的維特魯威人 (Vitruvian Man)

型二 平方根運算

例 2

化簡根式 $\sqrt{(\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{2})(-\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2})}$ 之值。

解 $\sqrt{(\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{2})(-\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2})}$

▣ 化簡根式 $\sqrt{(\sqrt{13}+\sqrt{7}+\sqrt{6})(\sqrt{13}+\sqrt{7}-\sqrt{6})(\sqrt{13}-\sqrt{7}+\sqrt{6})(-\sqrt{13}+\sqrt{7}+\sqrt{6})}$ 之值。

答： $2\sqrt{42}$

例 3

已知 n 和 k 均為正整數，且 $120 < n < 150$ 。若 n, k 滿足 $\sqrt{75} + \sqrt{n} = k\sqrt{3}$ ，試求數對 (n, k) 。

解

例 4

已知 $\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+x}}$ ，求 x 之值。

解

型三 立方根運算

例 5

若 $x = \sqrt[3]{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ ，求 $2x^3 - 6x$ 之值。

解

▣ [建國中學]

若 $x = \sqrt[3]{2} - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ ，求 $4x^3 + 12x + 5$ 之值為_____。

答：11