

主題 3 因式分解

1. 特殊四次多項式之因式分解

(1) 四連乘型四次多項式：

型如 $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)+e$ 的因式分解，通常會先將四個一次式作重新配對之後，再做十字交乘的逆運算。

【說例】

$$\begin{aligned} & (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-8 \\ &= [(x+1)(x+4)][(x+2)(x+3)]-8 \quad \text{[配對]} \\ &= (x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-8 \quad \text{[視 } x^2+5x \text{ 為一個新單位]} \\ &= (x^2+5x)^2+10(x^2+5x)+16 \quad \text{[再做十字交乘因式分解]} \\ &= (x^2+5x+8)(x^2+5x+2) \quad \text{[有理係數下的分解]} \end{aligned}$$

(2) 偶次式型四次多項式：

若多項式格式為四次、二次、常數，一般先注意可否直接十字交乘分解，例如

$$x^4-3x^2+2=(x^2-1)(x^2-2)$$

$$\begin{array}{cc} x^2 & -1 \\ & \times \\ x^2 & -2 \end{array}$$

。或是否可以先湊完全平方式，再增補項造成平方差。以下是兩個常見的公式：

$$\textcircled{1} \quad x^4+x^2+1=(x^2-x+1)(x^2+x+1)$$

$$\textcircled{2} \quad x^4+4=(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)$$

【說明】

① $x^4 + x^2 + 1 =$

②

2. 二變元多項式之因式分解

(1) 二變元分解：

$(1+x)(1+y) =$

(2) 三變元分解：

$(1+x)(1+y)(1+z) =$

(3) 強迫分解結構：

【說明】

看見題目中的算式有兩變數 x, y 並以 xy, x, y 的型態加減組合，可以試著用這個方式拆解。

【說例 1】

$$xy + 3x - 2y - 6 =$$

【說例 2】

$$xy + 5x + 4y + 19 =$$

型一 四連乘型四次多項式

例 1

試因式分解 $(x^2 + 2x + 4)(x^2 + 2x - 6) + 21$ 。

解 $(x^2 + 2x + 4)(x^2 + 2x - 6) + 21$

SWVA



例 2

試因式分解 $(x^2 + 3x + 2)(x^2 + 7x + 12) - 3$ 。

解 $(x^2 + 3x + 2)(x^2 + 7x + 12) - 3$

SWVA



型二 偶次式型四次多項式

例 3

因式分解 $x^4 - 27x^2 + 1$ 。

解

例 4

競賽資優試題

計算 $\frac{(2^4 + \frac{1}{4})(4^4 + \frac{1}{4})(6^4 + \frac{1}{4})(8^4 + \frac{1}{4})(10^4 + \frac{1}{4})}{(1^4 + \frac{1}{4})(3^4 + \frac{1}{4})(5^4 + \frac{1}{4})(7^4 + \frac{1}{4})(9^4 + \frac{1}{4})} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解 1° 原式 = $\frac{(4 \cdot 2^4 + 1)(4 \cdot 4^4 + 1)(4 \cdot 6^4 + 1)(4 \cdot 8^4 + 1)(4 \cdot 10^4 + 1)}{(4 \cdot 1^4 + 1)(4 \cdot 3^4 + 1)(4 \cdot 5^4 + 1)(4 \cdot 7^4 + 1)(4 \cdot 9^4 + 1)}$

2° $4x^4 + 1 = (4x^4 + 4x^2 + 1) - 4x^2 = (2x^2 + 1)^2 - (2x)^2$
 $= (2x^2 - 2x + 1)(2x^2 + 2x + 1) = [2(\underline{x-1})x + 1][2x(\underline{x+1}) + 1]$

3° 利用上式之分解可得

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \frac{[2(1 \times 2) + 1][2(2 \times 3) + 1] \cdots [2(9 \times 10) + 1][2(10 \times 11) + 1]}{[2(0 \times 1) + 1][2(1 \times 2) + 1] \cdots [2(8 \times 9) + 1][2(9 \times 10) + 1]} \\ &= \frac{2(10 \times 11) + 1}{2(0 \times 1) + 1} = 221\end{aligned}$$

例 5

已知 n 為整數，且 $P = n^4 - 6n^2 + 25$ 為一質數，求 n 與此質數 P 。

解

NSWC



型三 二變元強迫分解型

例 6

設 x, y 皆為正整數且 $x > y$, $xy + x + y = 54$ ，試解整數對 (x, y) 。

解

例 7

設 x, y 皆為正整數且 $\frac{5}{x} + \frac{4}{y} = 3$ ，試解整數對 (x, y) 。

解

EPEJ



型四 平方差拆解型

例 8

設 x 與 $\sqrt{x^2 + 71}$ 皆為正整數，試求 x 之值。

解

FWGB



▣ [挑戰題]

低年級的小立只會加法與減法，他正在解一道等差級數的問題： $1+2+3+\cdots+39+40$ 。
由於他在中間有一段連續的加法全都不小心寫成減號，例如：

$$1+2+3+4+5 -6-7-8-9-10-11-12 +13+14+15+\cdots+39+40。$$

已知小立有一段連續的加法全部寫成減法後，他的計算結果總和為 0。若他的加減法都沒有計算錯，試問他至少從哪個數字開始寫成減號？

答：11

設 n 為正整數，且若 $n^2 + 3n + 11$ 為兩相鄰正奇數的乘積，試求 n 之值。

解

2025^年 陳立教育

[單 一 年 度]

唯有陳立絕不混榜亂真 ★ 只有最好才能成就更好

姓名	就讀高中	錄取校系	姓名	就讀高中	錄取校系	姓名	就讀高中	錄取校系
朱○辰	建國中學	臺大 醫學系	徐○彤	復旦高中	臺大 化學工程學系	許○鈞	成功高中	臺大 動物科學技術學系
吳○聰	延平中學	臺大 電機工程學系	許 ○	政大附中	臺大 化學系	鄭○嘉	中山女中	臺大 外國語文學系
吳○諭	台南一中	臺大 電機工程學系	林○萱	北一女中	臺大 化學系	蘇○帆	松山高中	臺大 外國語文學系
林○羽	建國中學	臺大 電機工程學系	劉○滢	中山女中	臺大 化學系	陳○允	北一女中	臺大 中國文學系
李 ○	建國中學	臺大 電機工程學系	薛○豪	板橋高中	臺大 化學系	鄭 ○	曉明女中	臺大 中國文學系
錢○澤	建國中學	臺大 法律學系	戴○文	建國中學	臺大 機械工程學系	林○緯	松山高中	臺大 日本語文學系
彭○榆	台中女中	臺大 法律學系	詹○宇	建國中學	臺大 機械工程學系	汪○瑜	中山女中	臺大 人類學系
謝○臻	中山女中	臺大 法律學系	陳○廷	衛道中學	臺大 物理學系	江○穎	板橋高中	臺大 政治學系
吳○靜	中山女中	臺大 法律學系	李○婕	北一女中	臺大 工商管理學系	塗○茵	中山女中	臺大 哲學系
廖○程	海山高中	臺大 法律學系	林○珊	北一女中	臺大 公共衛生學系	張○榆	中壢高中	臺大 哲學系
陳○新	帥大附中	臺大 財務金融學系	劉○凱	內湖高中	臺大 生化科技學系	徐○喬	市立大同	臺大 歷史學系
吳○諾	北一女中	臺大 財務金融學系	劉○睿	南山高中	臺大 生化科技學系	朱○昱	板橋高中	臺大 歷史學系
申○任	建國中學	臺大 財務金融學系	李○紘	松山高中	臺大 生命科學系	薛○潔	民德國中	臺大 歷史學系
陳○昂	建國中學	臺大 財務金融學系	丁 ○	建國中學	臺大 生物產業傳播暨發展	蔡○芯	北一女中	臺大 心理學系
陳○臻	板橋高中	臺大 財務金融學系	馬○安	政大附中	臺大 生物產業傳播暨發展	鍾○閔	師大附中	臺大 數學系
陳○煒	衛道中學	臺大 財務金融學系	陳○瑜	中山女中	臺大 生物產業傳播暨發展	鄭○佑	台中二中	臺大 數學系
張○宜	建興國中	臺大 財務金融學系	洪○盈	中山女中	臺大 生物產業傳播暨發展	曾○升	台中一中	臺大 數學系
林○霆	成功高中	臺大 國際企業學系	邵○恩	市立大同	臺大 生物產業傳播暨發展	蔡○宸	市立大同	臺大 園藝暨景觀學系
游○翔	海山高中	臺大 國際企業學系	傅○愛	成淵高中	臺大 生物產業傳播暨發展	楊○佑	松山高中	臺大 園藝暨景觀學系
黃○珪	薇閣高中	臺大 國際企業學系	岑○融	建國中學	臺大 生物機電工程學系	劉○圓	北一女中	臺大 會計學系
蔡○恩	建國中學	臺大 國際企業學系	許○豪	和平高中	臺大 生物環境系統工程	張○勻	北一女中	臺大 會計學系
劉○豪	台中一中	臺大 國際企業學系	蔡○宇	建國中學	臺大 生物環境系統工程	陳○安	市立大同	臺大 會計學系
黃○躍	建國中學	臺大 資訊工程學系	謝○騏	建國中學	臺大 地理環境資源學系	李○晴	師大附中	臺大 會計學系
黃○綸	成功高中	臺大 資訊工程學系	劉○洋	建國中學	臺大 地質科學系	陳○瑄	北一女中	臺大 會計學系
祝○棟	建國中學	臺大 資訊工程學系	黃○熊	松山高中	臺大 地質科學系	盧○君	北一女中	臺大 會計學系
莊○儒	北一女中	臺大 電子工程學系	徐○鈞	台南一中	臺大 地質科學系	郭○倫	師大附中	臺大 經濟學系
楊○彬	師大附中	臺大 土木工程學系	洪○鈞	台南一中	臺大 工程科學及海洋工程	王○澤	師大附中	臺大 經濟學系
鍾○珪	中山女高	臺大 土木工程學系	蔡○鎔	建國中學	臺大 材料科學與工程學系	張○誌	建國中學	臺大 經濟學系
邱○榆	中壢高中	臺大 土木工程學系	魏○恩	南山高中	臺大 材料科學與工程學系	陳○瑋	成功高中	臺大 經濟學系
賴○澄	建國中學	臺大 化學工程學系	侯○憲	建國中學	臺大 昆蟲學系	楊○曄	台中一中	臺大 經濟學系
林○翰	建國中學	臺大 化學工程學系	李○億	台中二中	臺大 昆蟲學系	賴○安	建國中學	臺大 資訊管理學系

陳立既出 誰與爭鋒 ★ 各類榜首 盡在陳立

頂尖大學風雲榜

臺大、清大、陽交大、成大、政大 ★ Part 1

姓名	就讀高中	錄取校系	姓名	就讀高中	錄取校系	姓名	就讀高中	錄取校系
陳○祐	建國中學	臺大 資訊管理學系	吳○呈	建國中學	清大 原子科學院	李○瑩	台南女中	清大 藝術學院
陳○安	百齡高中	臺大 資訊管理學系	蕭○家	中壢高中	清大 材料科學工程學系	蔡○蓁	華盛頓中學	清大 藝術學院
張○豐	恆毅中學	臺大 農業經濟學系	游○宸	成功高中	清大 材料科學工程學系	林○佑	台中一中	清大 旭日招生丙組
黃○嘉	海山高中	臺大 農業經濟學系	劉○均	私立復興	清大 資訊工程學系	陳○芹	北一女中	陽交大 牙醫學系
林○宣	建國中學	臺大 農藝學系	許○佑	板橋高中	清大 生命科學系	任○佑	龜大附中	陽交大 中醫學系
魏○勲	海山高中	臺大 農藝學系	王○真	台南女中	清大 生命科學系	蔡○陽	建國中學	陽交大 電機工程學系
鄭○呈	師大附中	臺大 森林環境暨資源	張○洋	武陵高中	清大 生醫工程與環境科學	李○澄	南山高中	陽交大 電機工程學系
黃○綸	政大附中	臺大 植物病理與微生物	莊○勛	建國中學	清大 生醫工程與環境科學	潘○寧	建國中學	陽交大 電機工程學系
陳○融	北一女中	臺大 植物病理與微生物	謝○宇	華江高中	清大 生醫工程與環境科學	葉○恩	建國中學	陽交大 資訊工程學系
江○音	海山高中	臺大 圖書資訊學系	黃○翰	師大附中	清大 數學系	董○辰	建國中學	陽交大 資訊工程學系
古○廷	建國中學	臺大 醫學工程學系	陳○宏	板橋高中	清大 經濟學系	莊○銓	新民高中	陽交大 資訊工程學系
楊○語	中山女高	臺大 醫學檢驗暨生物技術	段○宸	海山高中	清大 經濟學系	梁○益	武陵高中	陽交大 資訊工程學系
莊○續	台中女中	臺大 醫學檢驗暨生物技術	林○媛	忠明高中	清大 經濟學系	陳○羽	台南女中	陽交大 資訊工程學系
魏○道	北一女中	臺大 醫學檢驗暨生物技術	田○榕	北一女中	清大 經濟學系	郭○佑	成功高中	陽交大 機械工程學系
王○寧	東山中學	臺大 獸醫學系	丁○昕	北一女中	清大 經濟學系	葉○邦	成功高中	陽交大 機械工程學系
王○文	建國中學	臺大 獸醫學系	劉○旺	市立大同	清大 計量財務金融學系	林○丞	成功高中	陽交大 機械工程學系
王○廉	建國中學	臺大 藥學系	許○勲	北一女中	清大 中國文學系	關○嫻	裕德中學	陽交大 機械工程學系
鄭○媛	北一女中	臺大 藥學系	包○瑄	中和高中	清大 中國文學系	黃○郡	建國中學	陽交大 機械工程學系
楊○宇	南山中學	臺大 藥學系	詹○婷	華僑高中	清大 中國文學系	李○宥	中壢高中	陽交大 機械工程學系
田○鉉	台南一中	臺大 護理學系	趙○靜	聖心女中	清大 英語教學系	洪○泰	後甲國中	陽交大 機械工程學系
黃○瑜	台中一中	清大 電機工程學系	李○嫣	師大附中	清大 教育心理與諮商	林○程	後甲國中	陽交大 機械工程學系
林○	成功高中	清大 電機資訊學院	陳○棋	中壢高中	清大 教育心理與諮商	卓○辰	平鎮高中	陽交大 電子物理學系
陳○勲	興國國中	清大 電機資訊學院	林○成	北大高中	清大 教育與學習科技	李○澤	成功高中	陽交大 電子物理學系
鄭○安	中山女中	清大 工業工程與工程管理	吳○諱	板橋高中	清大 教育與學習科技	歐○騫	台南一中	陽交大 半導體工程學系
施○信	民德國中	清大 工學院	何○萱	政大附中	清大 教育與學習科技	林○美	南科實中	陽交大 土木工程學系
賴○廷	南山高中	清大 化學工程學系	曾○瑀	中壢高中	清大 教育與學習科技	李○澤	後甲國中	陽交大 材料科學與工程
陳○睿	復興國中	清大 化學工程學系	方○文	中和高中	清大 幼兒教育學系	張○馨	松山高中	陽交大 工業工程與管理
孫○妤	新竹女中	清大 化學系	鄭○妍	北一女中	清大 人文社會學院	張○恩	平鎮高中	陽交大 工業工程與管理
蔡○宇	台南一中	清大 化學系	陳○璟	北大高中	清大 人文社會學院	 因為有你 陳立才能更好！		
王○維	南山高中	清大 化學系	林○穎	北一女中	清大 人文社會學院			
何○瑋	中山女高	清大 化學系	莊○榛	政大附中	清大 藝術學院			

全國最大 ★ 最專業的連鎖 K12 教育集團