

主題 2 乘法公式

ZGEZ



1. 國中基本公式

(1) 平方差：

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

(2) 和平方：

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 =$$

(2) 差平方：

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 =$$

【說明】

兩變數 a, b 的乘法公式最主要是訓練和、差、積，即 $a+b$, $a-b$, ab 來表現結構。

【說例】

$$3x^2 - 4xy + 3y^2 =$$

2. 多項和的平方公式

(1) 二項和的平方：

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2(ab)$$

(2) 三項和的平方：

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca)$$

(3) 四項和的平方：

$$(a+b+c+d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(\quad)$$

【説明】

	a	b
a		
b		

	a	b	c
a			
b			
c			

	a	b	c	d
a	a^2			
b		b^2		
c			c^2	
d				d^2

(4) 多項和的平方：

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 =$$

3. 三組平方和的公式

(1) 三組平方和的公式：

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca =$$

$$=$$

【説明】

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca &= \frac{1}{2}(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca) \\ &= \frac{1}{2}[(a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2ca + a^2)] \\ &= \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] \end{aligned}$$

(2) 公式應用：

① 若 a, b, c 為不完全相同之實數，則 $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca > 0$ 。

② 若 a, b, c 皆為實數，且 $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$ ，則 $a = b = c$ 。

4. 巴斯卡三角形與二項式展開係數

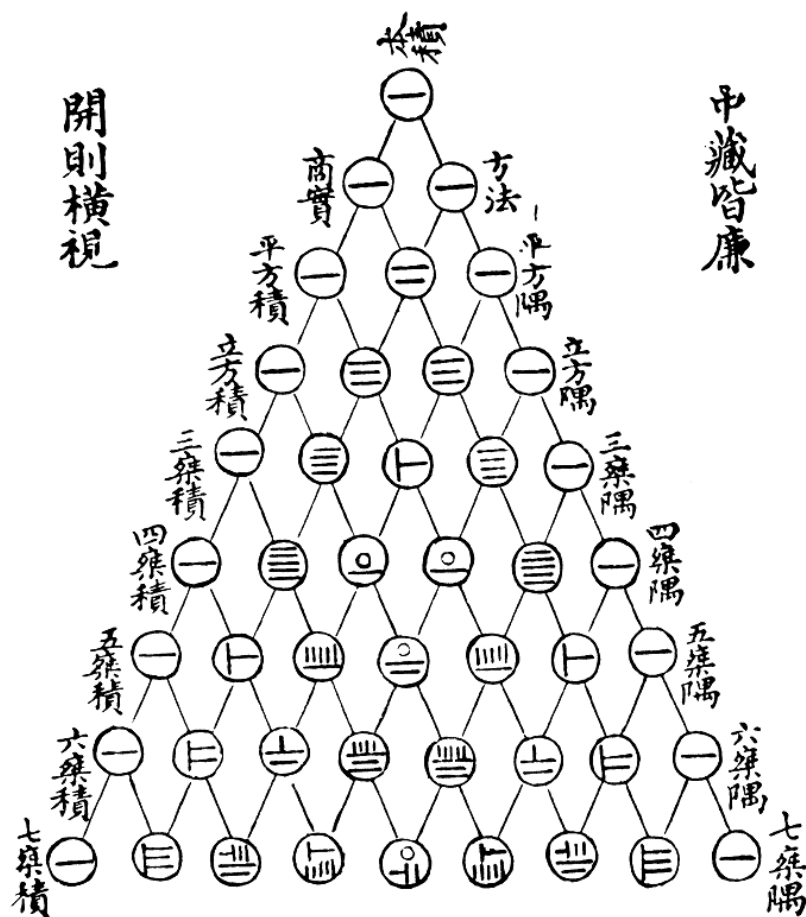
BVFF



(1) 巴斯卡三角形：

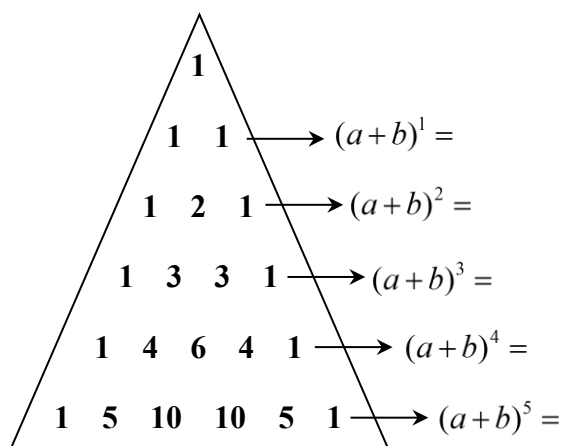
約莫西元 1303 年，中國的元代的朱世傑在其所著的《四元玉鑑》卷首繪製《古法七乘方圖》。獨立發現此規律的數學家非常多，現今最早可溯自十世紀的波斯數學家 Al-Karaji。

古法七乘方圖



本積	方法	上廉	二廉	三廉	四廉	五廉	六廉	七廉
----	----	----	----	----	----	----	----	----

(2) 二項式展開係數：



(3) 高次常用公式：

① 完全三次方：
$$\begin{cases} (x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \\ (x-y)^3 = \end{cases}$$

② 完全四次方：
$$\begin{cases} (x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 \\ (x-y)^4 = \end{cases}$$

③ 完全五次方：
$$\begin{cases} (x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5 \\ (x-y)^5 = \end{cases}$$

2. 立方公式

(1) 立方公式整理：

① 和立方：
$$(a+b)^3 = \boxed{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3} \quad \text{二項式展開}$$

$$= \boxed{a^3 + b^3 + 3ab(a+b)} \quad \text{和差積結構}$$

② 立方和：
$$a^3 + b^3 = \boxed{(a+b)^3 - 3ab(a+b)} \quad \text{和差積結構}$$

$$= \boxed{(a+b)(a^2 - ab + b^2)} \quad \text{因式分解}$$

$$\begin{aligned}\textcircled{3} \text{ 差立方： } (a-b)^3 &= \boxed{a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3} \quad \text{二項式展開} \\ &= \boxed{a^3 - b^3 - 3ab(a-b)} \quad \text{和差積結構}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\textcircled{4} \text{ 立方差： } a^3 - b^3 &= \boxed{(a-b)^3 + 3ab(a-b)} \quad \text{和差積結構} \\ &= \boxed{(a-b)(a^2 + ab + b^2)} \quad \text{因式分解}\end{aligned}$$

(2) 多項式常用表達：

$$\textcircled{1} \text{ 和立方： } (x+1)^3 =$$

$$\textcircled{2} \text{ 差立方： } (x-1)^3 =$$

$$\textcircled{3} \text{ 立方和： } x^3 + 1 =$$

$$\textcircled{4} \text{ 立方差： } x^3 - 1 =$$

型一 平方公式

例 1

化簡 $\frac{3^2}{3^2-1} \times \frac{4^2}{4^2-1} \times \frac{5^2}{5^2-1} \times \cdots \times \frac{32^2}{32^2-1}$ 之值。

解 $\frac{3^2}{3^2-1} \times \frac{4^2}{4^2-1} \times \frac{5^2}{5^2-1} \times \cdots \times \frac{32^2}{32^2-1}$

QMXG



▣ 沃利斯乘積 (The Wallis product for π)

數學家 John Wallis 在 1655 年發現了以下這個公式：

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)^2}{(2k)^2-1} = \frac{2^2}{2^2-1} \times \frac{4^2}{4^2-1} \times \frac{6^2}{6^2-1} \times \frac{8^2}{8^2-1} \times \cdots = \frac{\pi}{2}.$$

結構與例題 1 相當雷同。

例 2

求 $\sqrt{95 \times 99 \times 101 \times 105 + 144}$ 之值。

解

$$\sqrt{95 \times 99 \times 101 \times 105 + 144}$$

EIYJ



例 3

若已知 $0 < x < 1$ ，試化簡 $\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2} + 2} - \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2} - 2}$ 。

解

VWLP



▣ [建國中學]

已知 n 為自然數，且 $\sqrt{n + \frac{1}{n} + 2} - \sqrt{n + \frac{1}{n} - 2} < \frac{1}{10}$ ，則 n 的最小值為_____。

答：401

例 4

已知 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$ ， $a + b + c = \sqrt{5}$ ，求 $a^2 + b^2 + c^2$ 之值。

解

例 5

已知 $a-b=1+\sqrt{3}-\sqrt{2}$, $b-c=1-\sqrt{3}+\sqrt{2}$, 求 $(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)$ 之值。

解

$$\begin{aligned}
 & (a+b+c)^2-3(ab+bc+ca) \\
 &= a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca \\
 &= \frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2] \\
 &= \frac{1}{2}[(1+\sqrt{3}-\sqrt{2})^2+(1-\sqrt{3}+\sqrt{2})^2+(-2)^2] \\
 &= \frac{1}{2}[(1+3+2+2\sqrt{3}-2\sqrt{6}-2\sqrt{2})+(1+3+2-2\sqrt{3}-2\sqrt{6}+2\sqrt{2})+(4)] \\
 &= 8-2\sqrt{6}
 \end{aligned}$$

例 6

競賽資優試題

已知函數 $f(x)=(1+x)(1+x^4)(1+x^{16})(1+x^{64})\cdots$, 若 $f(\frac{3}{8}) \cdot f(a) = \frac{8}{5}$, 求 a 之值。

解

$$1^\circ \quad f(x^2) = (1+x^2)(1+x^8)(1+x^{32})\cdots$$

$$2^\circ \quad f(x) \cdot f(x^2) = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\cdots$$

$$= \frac{(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\cdots}{1-x} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1-x^t}{1-x} \cdots \cdots ①$$

$$3^\circ \quad \text{令 } x = \frac{3}{8} \text{ 代入 } ① \text{ 得 } f(\frac{3}{8}) \cdot f(\frac{9}{64}) = \frac{1}{1-\frac{3}{8}} = \frac{8}{5}, \text{ 故 } a = \frac{9}{64}$$

[當 $0 < x < 1$ 且 t 趨近於無窮大時, x^t 趨近於 0]



型二**高次公式****例 7**

若已知 $a+b=5$, $ab=3$, 試求下列各式之值：

(1) a^2+b^2

(2) $a-b$

(3) a^3+b^3

(4) a^4+b^4

(5) a^5+b^5

解

QRSY



例 8

因式分解 $a^6 - 64b^6$ 。

解 $a^6 - 64b^6$

▣ [挑戰題]

已知 a, b 皆為實數且 $\begin{cases} a^3 - 3ab^2 = -2 \\ b^3 - 3a^2b = -11 \end{cases}$ ，求 $a^2 + b^2$ 之值。

答：5

例 9

若已知 $x^2 - 3x + 1 = 0$ ，試求下列各式之值：

(1) $x^2 + \frac{1}{x^2}$ (2) $x^3 + \frac{1}{x^3}$ (3) $x^5 + \frac{1}{x^5}$ (4) $x^6 + \frac{1}{x^6}$

技巧訓練

若方程式有係數對稱結構，則_____。

解 $x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow$

(1) $x^2 + \frac{1}{x^2} =$

(2) $x^3 + \frac{1}{x^3} =$

(3) $x^5 + \frac{1}{x^5} =$

(4) $x^6 + \frac{1}{x^6} = (x^3 + \frac{1}{x^3})^2 - 2 \cdot x^3 \cdot \frac{1}{x^3} = (18)^2 - 2 = 322$

UUH



例 10

若 $\frac{x}{x^2+x+1} = \frac{1}{5}$ ，求 $\frac{x^3}{x^6+x^3+1}$ 之值。

解 1° $\frac{x}{x^2+x+1} = \frac{1}{5} \Rightarrow$

2° $\frac{x^3}{x^6+x^3+1} =$

例 11

請利用 $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ 與 $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ ，估計 $(3+\sqrt{7})^3$ 介於哪兩個整數之間，即 $n < (3+\sqrt{7})^3 < n+1$ ，其中 n 為正整數。

解 【法一】

1° $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

+) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$(a+b)^3 + (a-b)^3 = 2a^3 + 6ab^2 \dots\dots\dots \textcircled{1}$

2° 令 $a=3$, $b=\sqrt{7}$ 代入 $\textcircled{1}$ 得 $(3+\sqrt{7})^3 + (3-\sqrt{7})^3 = 2 \cdot 3^3 + 6 \cdot 3 \cdot 7 = 180$

3° $\because 0 < 3-\sqrt{7} < 1 \Rightarrow 0 < (3-\sqrt{7})^3 < 1$

$\therefore 179 < (3+\sqrt{7})^3 < 180$ ，故 $n=179$

【法二】

1° 令 $x=3+\sqrt{7}$, $y=3-\sqrt{7} \Rightarrow x+y=6$, $xy=2$

2° $x^3+y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) = 216 - 3 \cdot 2 \cdot 6 = 180$

$\because 0 < y < 1 \Rightarrow 0 < y^3 < 1$

$\therefore 179 < x^3 < 180$ ，故 $n=179$

$\frac{30^3+29^3}{30^3+1^3} + \frac{29^3+27^3}{29^3+2^3} + \frac{28^3+25^3}{28^3+3^3} + \cdots + \frac{17^3+3^3}{17^3+14^3} + \frac{16^3+1^3}{16^3+15^3}$ 之值為_____。

解 原式 = $\frac{30^3+1^3+29^3-1^3}{30^3+1^3} + \frac{29^3+2^3+27^3-2^3}{29^3+2^3} + \cdots + \frac{17^3+14^3+3^3-14^3}{17^3+14^3} + \frac{16^3+15^3+1^3-15^3}{16^3+15^3}$

$$= (1 + \frac{29^3-1^3}{30^3+1^3}) + (1 + \frac{27^3-2^3}{29^3+2^3}) + \cdots + (1 + \frac{3^3-14^3}{17^3+14^3}) + (1 + \frac{1^3-15^3}{16^3+15^3})$$

$$= 15 + \frac{(29-1)(29^2+29 \cdot 1+1^2)}{(30+1)(30^2-30 \cdot 1+1^2)} + \frac{(27-2)(27^2+27 \cdot 2+2^2)}{(29+2)(29^2-29 \cdot 2+2^2)} + \cdots + \frac{(1-15)(1^2+1 \cdot 15+15^2)}{(16+15)(16^2-16 \cdot 15+15^2)}$$

$$= 15 + \frac{(29-1)\cancel{(29 \times 30+1)}}{(30+1)\cancel{(29 \times 30+1)}} + \frac{(27-2)\cancel{(27 \times 29+4)}}{(29+2)\cancel{(27 \times 29+4)}} + \cdots + \frac{(1-15)\cancel{(1 \times 16+225)}}{(16+15)\cancel{(1 \times 16+225)}}$$

$$= 15 + \frac{28}{31} + \frac{25}{31} + \cdots + \frac{-11}{31} + \frac{-14}{31}$$

$$= 15 + \frac{1}{31} \cdot \frac{(28-14) \times 15}{2} = \frac{570}{31}$$

▣ 【挑戰題】

試解方程式 $\frac{111}{x} + \frac{111}{x^2} - \frac{11}{x^3} = 11$ 。

答：-1, $\frac{1}{11}$, 11