

Topic 1-1

實數與式的運算

主題 1 常用記號

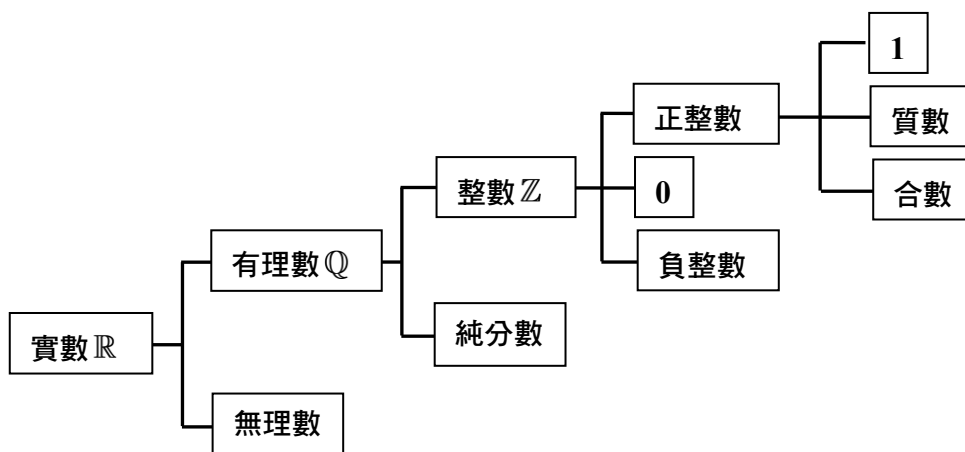
RWWF



1. 數系符號

(1) 實數結構：

實數內的組成與分類如下表所示，在之後的單元有更詳細的介紹。



(2) 整數集合的符號：

- ① 所有**整數 (integer)** 形成的集合，用_____表示。
- ② 所有**正整數 (positive integer)** 形成的集合，用_____表示。
- ③ 所有**負整數 (negative integer)** 形成的集合，用_____表示。
- ④ 所有**自然數 (natural number)** 形成的集合，用_____表示。

【說明】

在不同的領域中，自然數的定義可能會不相同，故在數學上會將兩個集合的符號作出區別。而定義中最主要的差別在於**有沒有包含 0 這個數字**。在高中課綱規定中，我們將自然數與正整數這兩者視為相同。

(3) 實數集合的符號：

- ① 所有實數 (real number) 形成的集合，用_____表示。
- ② 所有正實數 (positive number) 形成的集合，用_____表示。
- ③ 所有負實數 (negative number) 形成的集合，用_____表示。
- ④ 所有有理數 (rational number) 形成的集合，用_____表示。
- ⑤ 所有正有理數 (positive rational number) 形成的集合，用_____表示。

2. 邏輯符號

(1) 屬於的符號：

記號「 $\in$ 」代表_____。

- ① 當我們要表達「 x 是一個實數」時，可以用_____表示。
- ② 當我們要表達「 a 與 b 都是整數」時，可以用_____表示。

(2) 全稱符號：

記號「 $\forall$ 」代表_____。

【說例】

「對於任意正整數 x ，皆大於 0。」可表為：_____。

3. 極值符號

(1) 最大值符號：

「函數 $y = -(x-2)^2 + 5$ 的最大值 (maximum) 為 5」可記為_____。

(2) 最小值符號：

「函數 $y = 3(x-2)^2 + 7$ 的最小值 (minimum) 為 7」可記為_____。

主題 2 乘法公式

ZGEZ



1. 國中基本公式

(1) 平方差：

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

(2) 和平方：

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 =$$

(2) 差平方：

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 =$$

【說明】

兩變數 a, b 的乘法公式最主要是訓練和、差、積，即 $a+b$, $a-b$, ab 來表現結構。

【說例】

$$3x^2 - 4xy + 3y^2 =$$

2. 多項和的平方公式

(1) 二項和的平方：

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2(ab)$$

(2) 三項和的平方：

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca)$$

(3) 四項和的平方：

$$(a+b+c+d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(\quad)$$

【説明】

	a	b
a		
b		

	a	b	c
a			
b			
c			

	a	b	c	d
a	a^2			
b		b^2		
c			c^2	
d				d^2

(4) 多項和的平方：

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 =$$

3. 三組平方和的公式

(1) 三組平方和的公式：

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca =$$

$$=$$

【説明】

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca &= \frac{1}{2}(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca) \\ &= \frac{1}{2}[(a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2ca + a^2)] \\ &= \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] \end{aligned}$$

(2) 公式應用：

① 若 a, b, c 為不完全相同之實數，則 $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca > 0$ 。

② 若 a, b, c 皆為實數，且 $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$ ，則 $a = b = c$ 。

4. 巴斯卡三角形與二項式展開係數

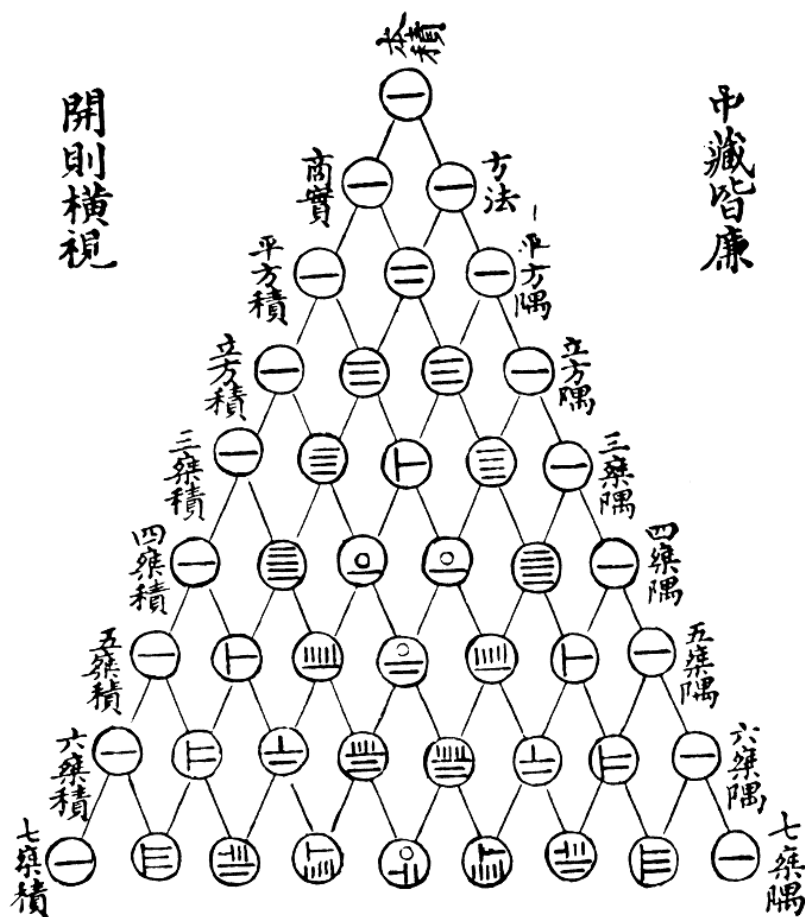
BVFF



(1) 巴斯卡三角形：

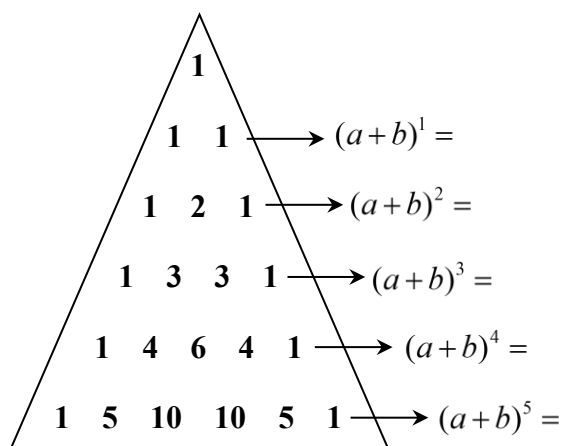
約莫西元 1303 年，中國的元代的朱世傑在其所著的《四元玉鑑》卷首繪製《古法七乘方圖》。獨立發現此規律的數學家非常多，現今最早可溯自十世紀的波斯數學家 Al-Karaji。

古法七乘方圖



本積	方法	上廉	二廉	三廉	四廉	五廉	六廉	七廉
----	----	----	----	----	----	----	----	----

(2) 二項式展開係數：



(3) 高次常用公式：

① 完全三次方：
$$\begin{cases} (x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \\ (x-y)^3 = \end{cases}$$

② 完全四次方：
$$\begin{cases} (x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 \\ (x-y)^4 = \end{cases}$$

③ 完全五次方：
$$\begin{cases} (x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5 \\ (x-y)^5 = \end{cases}$$

2. 立方公式

(1) 立方公式整理：

① 和立方：
$$(a+b)^3 = \boxed{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3} \quad \text{二項式展開}$$

$$= \boxed{a^3 + b^3 + 3ab(a+b)} \quad \text{和差積結構}$$

② 立方和：
$$a^3 + b^3 = \boxed{(a+b)^3 - 3ab(a+b)} \quad \text{和差積結構}$$

$$= \boxed{(a+b)(a^2 - ab + b^2)} \quad \text{因式分解}$$

$$\begin{aligned}\textcircled{3} \text{ 差立方： } (a-b)^3 &= \boxed{a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3} \quad \text{二項式展開} \\ &= \boxed{a^3 - b^3 - 3ab(a-b)} \quad \text{和差積結構}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\textcircled{4} \text{ 立方差： } a^3 - b^3 &= \boxed{(a-b)^3 + 3ab(a-b)} \quad \text{和差積結構} \\ &= \boxed{(a-b)(a^2 + ab + b^2)} \quad \text{因式分解}\end{aligned}$$

(2) 多項式常用表達：

$$\textcircled{1} \text{ 和立方： } (x+1)^3 =$$

$$\textcircled{2} \text{ 差立方： } (x-1)^3 =$$

$$\textcircled{3} \text{ 立方和： } x^3 + 1 =$$

$$\textcircled{4} \text{ 立方差： } x^3 - 1 =$$

型一 平方公式

例 1

化簡 $\frac{3^2}{3^2-1} \times \frac{4^2}{4^2-1} \times \frac{5^2}{5^2-1} \times \cdots \times \frac{32^2}{32^2-1}$ 之值。

解 $\frac{3^2}{3^2-1} \times \frac{4^2}{4^2-1} \times \frac{5^2}{5^2-1} \times \cdots \times \frac{32^2}{32^2-1}$

QMXG



▣ 沃利斯乘積 (The Wallis product for π)

數學家 John Wallis 在 1655 年發現了以下這個公式：

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)^2}{(2k)^2-1} = \frac{2^2}{2^2-1} \times \frac{4^2}{4^2-1} \times \frac{6^2}{6^2-1} \times \frac{8^2}{8^2-1} \times \cdots = \frac{\pi}{2}.$$

結構與例題 1 相當雷同。

例 2

求 $\sqrt{95 \times 99 \times 101 \times 105 + 144}$ 之值。

解

$$\sqrt{95 \times 99 \times 101 \times 105 + 144}$$

EIYJ



例 3

若已知 $0 < x < 1$ ，試化簡 $\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2} + 2} - \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2} - 2}$ 。

解

VWLP



▣ [建國中學]

已知 n 為自然數，且 $\sqrt{n + \frac{1}{n} + 2} - \sqrt{n + \frac{1}{n} - 2} < \frac{1}{10}$ ，則 n 的最小值為_____。

答：401

例 4

已知 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$ ， $a + b + c = \sqrt{5}$ ，求 $a^2 + b^2 + c^2$ 之值。

解

例 5

已知 $a-b=1+\sqrt{3}-\sqrt{2}$, $b-c=1-\sqrt{3}+\sqrt{2}$, 求 $(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)$ 之值。

解

$$\begin{aligned}
 & (a+b+c)^2-3(ab+bc+ca) \\
 &= a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca \\
 &= \frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2] \\
 &= \frac{1}{2}[(1+\sqrt{3}-\sqrt{2})^2+(1-\sqrt{3}+\sqrt{2})^2+(-2)^2] \\
 &= \frac{1}{2}[(1+3+2+2\sqrt{3}-2\sqrt{6}-2\sqrt{2})+(1+3+2-2\sqrt{3}-2\sqrt{6}+2\sqrt{2})+(4)] \\
 &= 8-2\sqrt{6}
 \end{aligned}$$

例 6

競賽資優試題

已知函數 $f(x)=(1+x)(1+x^4)(1+x^{16})(1+x^{64})\cdots$, 若 $f(\frac{3}{8}) \cdot f(a) = \frac{8}{5}$, 求 a 之值。

解

$$1^\circ \quad f(x^2) = (1+x^2)(1+x^8)(1+x^{32})\cdots$$

$$2^\circ \quad f(x) \cdot f(x^2) = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\cdots$$

$$= \frac{(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\cdots}{1-x} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1-x^t}{1-x} \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$3^\circ \quad \text{令 } x = \frac{3}{8} \text{ 代入 } \textcircled{1} \text{ 得 } f(\frac{3}{8}) \cdot f(\frac{9}{64}) = \frac{1}{1-\frac{3}{8}} = \frac{8}{5}, \text{ 故 } a = \frac{9}{64}$$

[當 $0 < x < 1$ 且 t 趨近於無窮大時, x^t 趨近於 0]



型二**高次公式****例 7**

若已知 $a+b=5$, $ab=3$ ，試求下列各式之值：

(1) a^2+b^2

(2) $a-b$

(3) a^3+b^3

(4) a^4+b^4

(5) a^5+b^5

解

QRSY



例 8

因式分解 $a^6 - 64b^6$ 。

解 $a^6 - 64b^6$

▣ [挑戰題]

已知 a, b 皆為實數且 $\begin{cases} a^3 - 3ab^2 = -2 \\ b^3 - 3a^2b = -11 \end{cases}$ ，求 $a^2 + b^2$ 之值。

答：5

例 9

若已知 $x^2 - 3x + 1 = 0$ ，試求下列各式之值：

(1) $x^2 + \frac{1}{x^2}$ (2) $x^3 + \frac{1}{x^3}$ (3) $x^5 + \frac{1}{x^5}$ (4) $x^6 + \frac{1}{x^6}$

技巧訓練

若方程式有係數對稱結構，則_____。

解 $x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow$

(1) $x^2 + \frac{1}{x^2} =$

(2) $x^3 + \frac{1}{x^3} =$

(3) $x^5 + \frac{1}{x^5} =$

(4) $x^6 + \frac{1}{x^6} = (x^3 + \frac{1}{x^3})^2 - 2 \cdot x^3 \cdot \frac{1}{x^3} = (18)^2 - 2 = 322$

UUH



例 10

若 $\frac{x}{x^2+x+1} = \frac{1}{5}$ ，求 $\frac{x^3}{x^6+x^3+1}$ 之值。

解 1° $\frac{x}{x^2+x+1} = \frac{1}{5} \Rightarrow$

2° $\frac{x^3}{x^6+x^3+1} =$

例 11

請利用 $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ 與 $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ ，估計 $(3+\sqrt{7})^3$ 介於哪兩個整數之間，即 $n < (3+\sqrt{7})^3 < n+1$ ，其中 n 為正整數。

解 【法一】

1° $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

+) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$(a+b)^3 + (a-b)^3 = 2a^3 + 6ab^2 \dots\dots\dots \textcircled{1}$

2° 令 $a=3$, $b=\sqrt{7}$ 代入 $\textcircled{1}$ 得 $(3+\sqrt{7})^3 + (3-\sqrt{7})^3 = 2 \cdot 3^3 + 6 \cdot 3 \cdot 7 = 180$

3° $\because 0 < 3-\sqrt{7} < 1 \Rightarrow 0 < (3-\sqrt{7})^3 < 1$

$\therefore 179 < (3+\sqrt{7})^3 < 180$ ，故 $n=179$

【法二】

1° 令 $x=3+\sqrt{7}$, $y=3-\sqrt{7} \Rightarrow x+y=6$, $xy=2$

2° $x^3+y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) = 216 - 3 \cdot 2 \cdot 6 = 180$

$\because 0 < y < 1 \Rightarrow 0 < y^3 < 1$

$\therefore 179 < x^3 < 180$ ，故 $n=179$

$\frac{30^3+29^3}{30^3+1^3} + \frac{29^3+27^3}{29^3+2^3} + \frac{28^3+25^3}{28^3+3^3} + \cdots + \frac{17^3+3^3}{17^3+14^3} + \frac{16^3+1^3}{16^3+15^3}$ 之值為_____。

解 原式 = $\frac{30^3+1^3+29^3-1^3}{30^3+1^3} + \frac{29^3+2^3+27^3-2^3}{29^3+2^3} + \cdots + \frac{17^3+14^3+3^3-14^3}{17^3+14^3} + \frac{16^3+15^3+1^3-15^3}{16^3+15^3}$

$$= (1 + \frac{29^3-1^3}{30^3+1^3}) + (1 + \frac{27^3-2^3}{29^3+2^3}) + \cdots + (1 + \frac{3^3-14^3}{17^3+14^3}) + (1 + \frac{1^3-15^3}{16^3+15^3})$$

$$= 15 + \frac{(29-1)(29^2+29 \cdot 1+1^2)}{(30+1)(30^2-30 \cdot 1+1^2)} + \frac{(27-2)(27^2+27 \cdot 2+2^2)}{(29+2)(29^2-29 \cdot 2+2^2)} + \cdots + \frac{(1-15)(1^2+1 \cdot 15+15^2)}{(16+15)(16^2-16 \cdot 15+15^2)}$$

$$= 15 + \frac{(29-1)\cancel{(29 \times 30+1)}}{(30+1)\cancel{(29 \times 30+1)}} + \frac{(27-2)\cancel{(27 \times 29+4)}}{(29+2)\cancel{(27 \times 29+4)}} + \cdots + \frac{(1-15)\cancel{(1 \times 16+225)}}{(16+15)\cancel{(1 \times 16+225)}}$$

$$= 15 + \frac{28}{31} + \frac{25}{31} + \cdots + \frac{-11}{31} + \frac{-14}{31}$$

$$= 15 + \frac{1}{31} \cdot \frac{(28-14) \times 15}{2} = \frac{570}{31}$$

▣ 【挑戰題】

試解方程式 $\frac{111}{x} + \frac{111}{x^2} - \frac{11}{x^3} = 11$ 。

答：-1, $\frac{1}{11}$, 11

主題 3 因式分解



1. 特殊四次多項式之因式分解

(1) 四連乘型四次多項式：

型如 $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)+e$ 的因式分解，通常會先將四個一次式作重新配對之後，再做十字交乘的逆運算。

【說例】

$$\begin{aligned}
 & (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-8 \\
 &= [(x+1)(x+4)][(x+2)(x+3)]-8 \quad \text{[配對]} \\
 &= (x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-8 \quad \text{[視 } x^2+5x \text{ 為一個新單位]} \\
 &= (x^2+5x)^2+10(x^2+5x)+16 \quad \text{[再做十字交乘因式分解]} \\
 &= (x^2+5x+8)(x^2+5x+2) \quad \text{[有理係數下的分解]}
 \end{aligned}$$

(2) 偶次式型四次多項式：

若多項式格式為四次、二次、常數，一般先注意可否直接十字交乘分解，例如

$$x^4-3x^2+2=(x^2-1)(x^2-2)$$

$$\begin{array}{cc}
 x^2 & -1 \\
 & \times \\
 x^2 & -2
 \end{array}$$

。或是否可以先湊完全平方式，再增補項造成平方差。以下是兩個常見的公式：

$$\textcircled{1} \quad x^4+x^2+1=(x^2-x+1)(x^2+x+1)$$

$$\textcircled{2} \quad x^4+4=(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)$$

【說明】

① $x^4 + x^2 + 1 =$

②

2. 二變元多項式之因式分解

(1) 二變元分解：

$(1+x)(1+y) =$

(2) 三變元分解：

$(1+x)(1+y)(1+z) =$

(3) 強迫分解結構：

【說明】

看見題目中的算式有兩變數 x, y 並以 xy, x, y 的型態加減組合，可以試著用這個方式拆解。

【說例 1】

$$xy + 3x - 2y - 6 =$$

【說例 2】

$$xy + 5x + 4y + 19 =$$

型一 四連乘型四次多項式

例 1

試因式分解 $(x^2 + 2x + 4)(x^2 + 2x - 6) + 21$ 。

解 $(x^2 + 2x + 4)(x^2 + 2x - 6) + 21$

SWVA



例 2

試因式分解 $(x^2 + 3x + 2)(x^2 + 7x + 12) - 3$ 。

解 $(x^2 + 3x + 2)(x^2 + 7x + 12) - 3$

SWVA



型二 偶次式型四次多項式

例 3

因式分解 $x^4 - 27x^2 + 1$ 。

解

例 4

競賽資優試題

計算 $\frac{(2^4 + \frac{1}{4})(4^4 + \frac{1}{4})(6^4 + \frac{1}{4})(8^4 + \frac{1}{4})(10^4 + \frac{1}{4})}{(1^4 + \frac{1}{4})(3^4 + \frac{1}{4})(5^4 + \frac{1}{4})(7^4 + \frac{1}{4})(9^4 + \frac{1}{4})} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解 1° 原式 = $\frac{(4 \cdot 2^4 + 1)(4 \cdot 4^4 + 1)(4 \cdot 6^4 + 1)(4 \cdot 8^4 + 1)(4 \cdot 10^4 + 1)}{(4 \cdot 1^4 + 1)(4 \cdot 3^4 + 1)(4 \cdot 5^4 + 1)(4 \cdot 7^4 + 1)(4 \cdot 9^4 + 1)}$

2° $4x^4 + 1 = (4x^4 + 4x^2 + 1) - 4x^2 = (2x^2 + 1)^2 - (2x)^2$
 $= (2x^2 - 2x + 1)(2x^2 + 2x + 1) = [2(\underline{x-1})x + 1][2x(\underline{x+1}) + 1]$

3° 利用上式之分解可得

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \frac{[2(1 \times 2) + 1][2(2 \times 3) + 1] \cdot [2(3 \times 4) + 1][2(4 \times 5) + 1] \cdots [2(9 \times 10) + 1][2(10 \times 11) + 1]}{[2(0 \times 1) + 1][2(1 \times 2) + 1] \cdot [2(2 \times 3) + 1][2(3 \times 4) + 1] \cdots [2(8 \times 9) + 1][2(9 \times 10) + 1]} \\ &= \frac{2(10 \times 11) + 1}{2(0 \times 1) + 1} = 221\end{aligned}$$

例 5

已知 n 為整數，且 $P = n^4 - 6n^2 + 25$ 為一質數，求 n 與此質數 P 。

解

NSWC



型三 二變元強迫分解型

例 6

設 x, y 皆為正整數且 $x > y$, $xy + x + y = 54$ ，試解整數對 (x, y) 。

解

例 7

設 x, y 皆為正整數且 $\frac{5}{x} + \frac{4}{y} = 3$ ，試解整數對 (x, y) 。

解

EPEJ



型四 平方差拆解型

例 8

設 x 與 $\sqrt{x^2 + 71}$ 皆為正整數，試求 x 之值。

解

FWGB



▣ [挑戰題]

低年級的小立只會加法與減法，他正在解一道等差級數的問題： $1+2+3+\cdots+39+40$ 。
由於他在中間有一段連續的加法全都不小心寫成減號，例如：

$$1+2+3+4+5 -6-7-8-9-10-11-12 +13+14+15+\cdots+39+40。$$

已知小立有一段連續的加法全部寫成減法後，他的計算結果總和為 0。若他的加減法都沒有計算錯，試問他至少從哪個數字開始寫成減號？

答：11

設 n 為正整數，且若 $n^2 + 3n + 11$ 為兩相鄰正奇數的乘積，試求 n 之值。

解

2025^年 陳立教育

[單 一 年 度]

唯有陳立絕不混榜亂真 ★ 只有最好才能成就更好

姓名	就讀高中	錄取校系	姓名	就讀高中	錄取校系	姓名	就讀高中	錄取校系
朱○辰	建國中學	臺大 醫學系	徐○彤	復旦高中	臺大 化學工程學系	許○鈞	成功高中	臺大 動物科學技術學系
吳○聰	延平中學	臺大 電機工程學系	許 ○	政大附中	臺大 化學系	鄭○嘉	中山女中	臺大 外國語文學系
吳○諭	台南一中	臺大 電機工程學系	林○萱	北一女中	臺大 化學系	蘇○帆	松山高中	臺大 外國語文學系
林○羽	建國中學	臺大 電機工程學系	劉○滢	中山女中	臺大 化學系	陳○允	北一女中	臺大 中國文學系
李 ○	建國中學	臺大 電機工程學系	薛○豪	板橋高中	臺大 化學系	鄭 ○	曉明女中	臺大 中國文學系
錢○澤	建國中學	臺大 法律學系	戴○文	建國中學	臺大 機械工程學系	林○緯	松山高中	臺大 日本語文學系
彭○榆	台中女中	臺大 法律學系	詹○宇	建國中學	臺大 機械工程學系	汪○瑜	中山女中	臺大 人類學系
謝○臻	中山女中	臺大 法律學系	陳○廷	衛道中學	臺大 物理學系	江○穎	板橋高中	臺大 政治學系
吳○靜	中山女中	臺大 法律學系	李○婕	北一女中	臺大 工商管理學系	塗○茵	中山女中	臺大 哲學系
廖○程	海山高中	臺大 法律學系	林○珊	北一女中	臺大 公共衛生學系	張○榆	中壢高中	臺大 哲學系
陳○新	帥大附中	臺大 財務金融學系	劉○凱	內湖高中	臺大 生化科技學系	徐○喬	市立大同	臺大 歷史學系
吳○諾	北一女中	臺大 財務金融學系	劉○睿	南山高中	臺大 生化科技學系	朱○昱	板橋高中	臺大 歷史學系
申○任	建國中學	臺大 財務金融學系	李○紘	松山高中	臺大 生命科學系	薛○潔	民德國中	臺大 歷史學系
陳○昂	建國中學	臺大 財務金融學系	丁 ○	建國中學	臺大 生物產業傳播暨發展	蔡○芯	北一女中	臺大 心理學系
陳○臻	板橋高中	臺大 財務金融學系	馬○安	政大附中	臺大 生物產業傳播暨發展	鍾○閔	師大附中	臺大 數學系
陳○煒	衛道中學	臺大 財務金融學系	陳○瑜	中山女中	臺大 生物產業傳播暨發展	鄭○佑	台中二中	臺大 數學系
張○宜	建興國中	臺大 財務金融學系	洪○盈	中山女中	臺大 生物產業傳播暨發展	曾○升	台中一中	臺大 數學系
林○霆	成功高中	臺大 國際企業學系	邵○恩	市立大同	臺大 生物產業傳播暨發展	蔡○宸	市立大同	臺大 園藝暨景觀學系
游○翔	海山高中	臺大 國際企業學系	傅○愛	成淵高中	臺大 生物產業傳播暨發展	楊○佑	松山高中	臺大 園藝暨景觀學系
黃○珪	薇閣高中	臺大 國際企業學系	岑○融	建國中學	臺大 生物機電工程學系	劉○圓	北一女中	臺大 會計學系
蔡○恩	建國中學	臺大 國際企業學系	許○豪	和平高中	臺大 生物環境系統工程	張○勻	北一女中	臺大 會計學系
劉○豪	台中一中	臺大 國際企業學系	蔡○宇	建國中學	臺大 生物環境系統工程	陳○安	市立大同	臺大 會計學系
黃○躍	建國中學	臺大 資訊工程學系	謝○騏	建國中學	臺大 地理環境資源學系	李○晴	師大附中	臺大 會計學系
黃○綸	成功高中	臺大 資訊工程學系	劉○洋	建國中學	臺大 地質科學系	陳○瑄	北一女中	臺大 會計學系
祝○棟	建國中學	臺大 資訊工程學系	黃○熊	松山高中	臺大 地質科學系	盧○君	北一女中	臺大 會計學系
莊○儒	北一女中	臺大 電子工程學系	徐○鈞	台南一中	臺大 地質科學系	郭○倫	師大附中	臺大 經濟學系
楊○彬	師大附中	臺大 土木工程學系	洪○鈞	台南一中	臺大 工程科學及海洋工程	王○澤	師大附中	臺大 經濟學系
鍾○珪	中山女高	臺大 土木工程學系	蔡○鎔	建國中學	臺大 材料科學與工程學系	張○誌	建國中學	臺大 經濟學系
邱○榆	中壢高中	臺大 土木工程學系	魏○恩	南山高中	臺大 材料科學與工程學系	陳○瑋	成功高中	臺大 經濟學系
賴○澄	建國中學	臺大 化學工程學系	侯○憲	建國中學	臺大 昆蟲學系	楊○曄	台中一中	臺大 經濟學系
林○翰	建國中學	臺大 化學工程學系	李○億	台中二中	臺大 昆蟲學系	賴○安	建國中學	臺大 資訊管理學系

陳立既出 誰與爭鋒 ★ 各類榜首 盡在陳立

頂尖大學風雲榜

臺大、清大、陽交大、成大、政大 ★ Part 1

姓名	就讀高中	錄取校系	姓名	就讀高中	錄取校系	姓名	就讀高中	錄取校系
陳○祐	建國中學	臺大 資訊管理學系	吳○呈	建國中學	清大 原子科學院	李○瑩	台南女中	清大 藝術學院
陳○安	百齡高中	臺大 資訊管理學系	蕭○家	中壢高中	清大 材料科學工程學系	蔡○蓁	華盛頓中學	清大 藝術學院
張○豐	恆毅中學	臺大 農業經濟學系	游○宸	成功高中	清大 材料科學工程學系	林○佑	台中一中	清大 旭日招生丙組
黃○嘉	海山高中	臺大 農業經濟學系	劉○均	私立復興	清大 資訊工程學系	陳○芹	北一女中	陽交大 牙醫學系
林○宣	建國中學	臺大 農藝學系	許○佑	板橋高中	清大 生命科學系	任○佑	龜大附中	陽交大 中醫學系
魏○勲	海山高中	臺大 農藝學系	王○真	台南女中	清大 生命科學系	蔡○陽	建國中學	陽交大 電機工程學系
鄭○呈	師大附中	臺大 森林環境暨資源	張○洋	武陵高中	清大 生醫工程與環境科學	李○澄	南山高中	陽交大 電機工程學系
黃○綸	政大附中	臺大 植物病理與微生物	莊○勛	建國中學	清大 生醫工程與環境科學	潘○寧	建國中學	陽交大 電機工程學系
陳○融	北一女中	臺大 植物病理與微生物	謝○宇	華江高中	清大 生醫工程與環境科學	葉○恩	建國中學	陽交大 資訊工程學系
江○音	海山高中	臺大 圖書資訊學系	黃○翰	師大附中	清大 數學系	董○辰	建國中學	陽交大 資訊工程學系
古○廷	建國中學	臺大 醫學工程學系	陳○宏	板橋高中	清大 經濟學系	莊○銓	新民高中	陽交大 資訊工程學系
楊○語	中山女高	臺大 醫學檢驗暨生物技術	段○宸	海山高中	清大 經濟學系	梁○益	武陵高中	陽交大 資訊工程學系
莊○續	台中女中	臺大 醫學檢驗暨生物技術	林○媛	忠明高中	清大 經濟學系	陳○羽	台南女中	陽交大 資訊工程學系
魏○道	北一女中	臺大 醫學檢驗暨生物技術	田○榕	北一女中	清大 經濟學系	郭○佑	成功高中	陽交大 機械工程學系
王○寧	東山中學	臺大 獸醫學系	丁○昕	北一女中	清大 經濟學系	葉○邦	成功高中	陽交大 機械工程學系
王○文	建國中學	臺大 獸醫學系	劉○旺	市立大同	清大 計量財務金融學系	林○丞	成功高中	陽交大 機械工程學系
王○廉	建國中學	臺大 藥學系	許○勲	北一女中	清大 中國文學系	關○嫻	裕德中學	陽交大 機械工程學系
鄭○媛	北一女中	臺大 藥學系	包○瑄	中和高中	清大 中國文學系	黃○郡	建國中學	陽交大 機械工程學系
楊○宇	南山中學	臺大 藥學系	詹○婷	華僑高中	清大 中國文學系	李○宥	中壢高中	陽交大 機械工程學系
田○鉉	台南一中	臺大 護理學系	趙○靜	聖心女中	清大 英語教學系	洪○泰	後甲國中	陽交大 機械工程學系
黃○瑜	台中一中	清大 電機工程學系	李○嫣	師大附中	清大 教育心理與諮商	林○程	後甲國中	陽交大 機械工程學系
林○	成功高中	清大 電機資訊學院	陳○棋	中壢高中	清大 教育心理與諮商	卓○辰	平鎮高中	陽交大 電子物理學系
陳○勲	興國國中	清大 電機資訊學院	林○成	北大高中	清大 教育與學習科技	李○澤	成功高中	陽交大 電子物理學系
鄭○安	中山女中	清大 工業工程與工程管理	吳○諱	板橋高中	清大 教育與學習科技	歐○騫	台南一中	陽交大 半導體工程學系
施○信	民德國中	清大 工學院	何○萱	政大附中	清大 教育與學習科技	林○美	南科實中	陽交大 土木工程學系
賴○廷	南山高中	清大 化學工程學系	曾○瑀	中壢高中	清大 教育與學習科技	李○澤	後甲國中	陽交大 材料科學與工程
陳○睿	復興國中	清大 化學工程學系	方○文	中和高中	清大 幼兒教育學系	張○馨	松山高中	陽交大 工業工程與管理
孫○妤	新竹女中	清大 化學系	鄭○妍	北一女中	清大 人文社會學院	張○恩	平鎮高中	陽交大 工業工程與管理
蔡○宇	台南一中	清大 化學系	陳○璟	北大高中	清大 人文社會學院	 因為有你 陳立才能更好！		
王○維	南山高中	清大 化學系	林○穎	北一女中	清大 人文社會學院			
何○瑋	中山女高	清大 化學系	莊○榛	政大附中	清大 藝術學院			

全國最大 ★ 最專業的連鎖 K12 教育集團

主題 4 平方根與高次方根

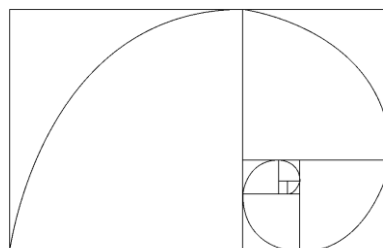
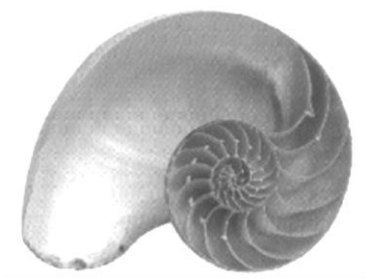
1. 黃金分割

(1) 黃金分割的意義：

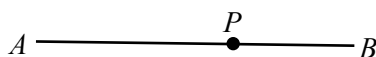
數學家歐幾里得在其所著《幾何原本》一書當中，提出他的論點：如果在一條線段上找出一個點，將這條線段分成長、短兩段，使得

「全段長：長邊的長＝長邊的長：短邊的長」

，那麼，這種分割方式就叫作黃金分割。



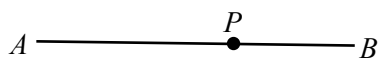
(2) 黃金比例：



若 P 為線段 $\overline{AB}$ 上一點且 $\overline{PA} > \overline{PB}$ ，若滿足 $\frac{\overline{AB}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$ (黃金分割) 時，我們稱此比值

$\frac{\overline{AB}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \boxed{}$ 為黃金比例，其中此值約為 $\boxed{}$ 。

【證明】



UFET



2. 方根概念

(1) 代數學基本定理：

n 次多項式方程式必定會有 n 個根，包含實根與虛根 (虛根為高三課程範圍)。

(2) 方根表示法：

① $x^2 = 5$ 的實數平方根為_____，可記為_____。

② $x^3 = 7$ 的實數立方根為_____，可記為_____。

③ $x^5 = 8$ 的實數五次方根為_____，可記為_____。

【說明】

3. 方根運算

(1) 偶次方根：

設 a 為任意實數且 n 為偶數，則 $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ 。

(2) 奇次方根：

設 a 為任意正實數且 n 為奇數，則 $\sqrt[n]{a^n} = a$ 。 [高中只討論正底數的奇次方根]

【說例 1】

$$\sqrt[4]{(-2)^4} = \underline{\hspace{2cm}}$$

【說例 2】

$$\sqrt[3]{5^3} = \underline{\hspace{2cm}}$$

(3) 同類方根的加減運算：

同次根號內的被開方數相同，則稱為**同類方根**，而同類根號的加減，即是把根號前的係數相加。

【說例】

$$2\sqrt[3]{3} + 5\sqrt[3]{3} = 7\sqrt[3]{3}$$

(4) 同次方根內的乘除運算：

同次根號的實數乘除運算，可在根號內合併乘除運算。

【說例】

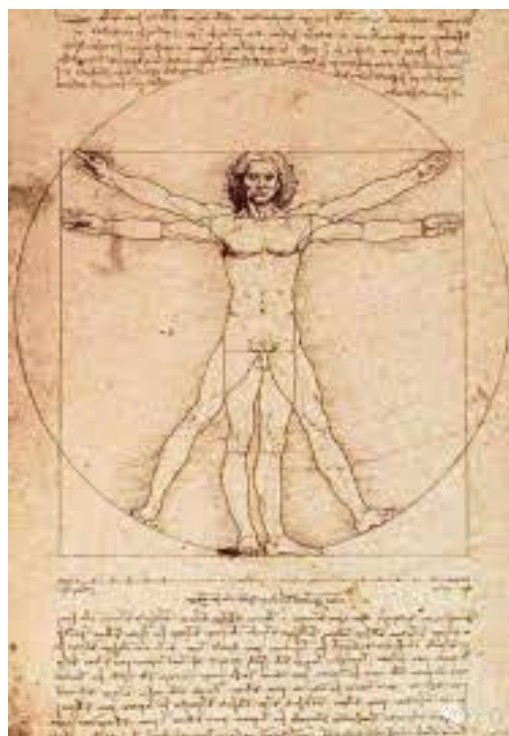
$$\frac{\sqrt[3]{81} \times \sqrt[3]{32}}{\sqrt[3]{6}} =$$

型一 黃金比例

例 1

古希臘人認為身材的比例如果滿足 $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{PA}} = \phi$ (A 為腳底， P 為肚臍， B 為頭頂)，則是最美的身材比例，這個比例值 ϕ 稱為黃金比例，如果小立身高為 150 公分，他的肚臍到腳底為 90 公分，如果想要達成看起來是黃金比例，則試問小立要穿多高的鞋子？
(試用計算機操作並四捨五入至小數點以下第 2 位)

解



達文西的維特魯威人 (Vitruvian Man)

型二 平方根運算

例 2

化簡根式 $\sqrt{(\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{2})(-\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2})}$ 之值。

解 $\sqrt{(\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{2})(-\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2})}$

▣ 化簡根式 $\sqrt{(\sqrt{13}+\sqrt{7}+\sqrt{6})(\sqrt{13}+\sqrt{7}-\sqrt{6})(\sqrt{13}-\sqrt{7}+\sqrt{6})(-\sqrt{13}+\sqrt{7}+\sqrt{6})}$ 之值。

答： $2\sqrt{42}$

例 3

已知 n 和 k 均為正整數，且 $120 < n < 150$ 。若 n, k 滿足 $\sqrt{75} + \sqrt{n} = k\sqrt{3}$ ，試求數對 (n, k) 。

解

例 4

已知 $\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+x}}$ ，求 x 之值。

解

型三 立方根運算

例 5

若 $x = \sqrt[3]{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ ，求 $2x^3 - 6x$ 之值。

解

▣ [建國中學]

若 $x = \sqrt[3]{2} - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ ，求 $4x^3 + 12x + 5$ 之值為_____。

答：11

主題 5 特殊方根的處理



1. 分母有理化

(1) 二次根式有理化：

$$\textcircled{1} \sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{\frac{b}{a} \times \frac{a}{a}} = \frac{\sqrt{ab}}{a} \quad (a > 0, b > 0)$$

$$\textcircled{2} \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b} \quad (a > 0, b > 0, a \neq b)$$

$$\textcircled{3} \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a - b} \quad (a > 0, b > 0, a \neq b)$$



(2) 三次根式有理化：[自行參考]

$$\textcircled{1} \sqrt[3]{\frac{b}{a}} = \sqrt[3]{\frac{b}{a} \times \frac{a^2}{a^2}} = \frac{\sqrt[3]{a^2b}}{a} \quad (a > 0, b > 0)$$

$$\textcircled{2} \frac{1}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}} \times \frac{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}} = \frac{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}{a + b} \quad (a > 0, b > 0)$$

$$\textcircled{3} \frac{1}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}} \times \frac{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}} = \frac{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}{a - b} \quad (a > 0, b > 0, a \neq b)$$

【說例】

三次根式和與三次根式差的分母有理化可由以下公式達成。

$$(x + y)(x^2 - xy + y^2) = x^3 + y^3, \quad (x - y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 - y^3$$

舉例來說：

$$(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2})(\quad) =$$

(3) 有理化技巧-交叉相乘：

對分母有理化之前，可先觀察是否易與有理化的結果採取交叉相乘，舉例來說：

由於 $(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})=1$ ，故 $\frac{1}{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}} = \sqrt{k+1}+\sqrt{k}$ ；

由於 $(\sqrt{k+2}+\sqrt{k})(\sqrt{k+2}-\sqrt{k})=2\times 1$ ，故 $\frac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k}} = \frac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k}}{2}$ 。

【說例】

① $\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{5}} =$

② $\frac{1}{\sqrt{13}-\sqrt{11}} =$

③ $\frac{1}{\sqrt{17}+\sqrt{15}} =$

3. 子母雙重根式

(1) 子母雙重根式：

① 平方和型： $\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}} =$ _____ ($a > 0, b > 0$)

② 平方差型： $\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}} =$ _____ ($a > 0, b > 0$)

【說明】

$$\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}} = \sqrt{(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 + 2\sqrt{a}\sqrt{b}} = \sqrt{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} = \sqrt{a}+\sqrt{b}$$

$$\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}} = \sqrt{(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b}} = \sqrt{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2} = |\sqrt{a}-\sqrt{b}|$$

【說例】

① $\sqrt{5+2\sqrt{6}} =$

② $\sqrt{17-12\sqrt{2}} =$

$$\textcircled{3} \sqrt{14+3\sqrt{20}} =$$

$$\textcircled{4} \sqrt{2+\sqrt{3}} =$$

(2) 共軛子母雙根號：

遇到 $\sqrt{a+\sqrt{b}} \pm \sqrt{a-\sqrt{b}}$ 型題目(其中 $a > b > 0$)，通常會以平方處理之。因為平方會造成 $(a+\sqrt{b})+(a-\sqrt{b})$ 及 $\sqrt{a+\sqrt{b}}\sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{a^2-b}$ 較好處理的結構。

【說例】

以下我們來說明 $\sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}}$ 是如何化簡成 $\sqrt{2}$ 的。

⇒ 以下還有幾組數據提供給同學練習：

$$\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}} = \sqrt{2}, \quad \sqrt{4+\sqrt{15}} - \sqrt{4-\sqrt{15}} = \sqrt{6}, \quad \sqrt{14+6\sqrt{5}} + \sqrt{14-6\sqrt{5}} = 6$$

型一 分母有理化

例 1

試將下列各式之分母有理化：

$$(1) \sqrt[3]{\frac{2}{3}} \quad (2) \frac{1}{2-\sqrt[3]{3}}$$

解

ZMBY



例 2

試將 $\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ 之分母有理化。

解

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$

例 3

化簡 $\frac{\sqrt{35} + \sqrt{21} + 5 + \sqrt{15}}{\sqrt{7} + 2\sqrt{5} + \sqrt{3}}$ 。

解

$$\frac{\sqrt{35} + \sqrt{21} + 5 + \sqrt{15}}{\sqrt{7} + 2\sqrt{5} + \sqrt{3}}$$

NSRM



型二 根式基本運算

例 4

化簡 $S = \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}}$ 之值。

解 $S = \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}}$

IJTH



例 5

已知 $x = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$, $y = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$, 求 $\sqrt{3x^2-5xy+3y^2}$ 之值。

解

型三 $\sqrt{n+1} \pm \sqrt{n}$ 運算**例 6**

試比較下列各數的大小：

(1) $a = \sqrt{19} + \sqrt{21}$, $b = \sqrt{18} + \sqrt{22}$, $c = \sqrt{17} + \sqrt{23}$

(2) $x = \sqrt{20} - \sqrt{19}$, $y = \sqrt{19} - \sqrt{18}$, $z = \sqrt{18} - \sqrt{17}$

解

例 7

求滿足 $\sqrt{n} - \sqrt{n-1} < 0.01$ 之最小正整數 n 。

解

型四 多重根式的處理

例 8

各校重要考題

若 $\sqrt{11+6\sqrt{2}}$ 的整數部分為 a ，小數部分為 b ，則 $\frac{1}{b} - \frac{7}{a+b} =$ _____。

解 1° $\sqrt{11+6\sqrt{2}} = \sqrt{11+2\sqrt{18}} = \sqrt{9} + \sqrt{2} = 3 + \sqrt{2}$

整數部分為 $a =$ _____，小數部分為 $b =$ _____

2° $\frac{1}{b} - \frac{7}{a+b} =$ _____

STHW



例 9

有多少正整數 x 使得 $\sqrt{51-\sqrt{x}}$ 為整數？

解

證明 $\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+5\sqrt{1+6\sqrt{1+\cdots}}}}}} = 3$ 。

$$\begin{aligned} \text{證 } 1^\circ \quad 3 &= \sqrt{9} = \sqrt{1+8} = \sqrt{1+2 \cdot 4} = \sqrt{1+2\sqrt{16}} = \sqrt{1+2\sqrt{1+15}} = \sqrt{1+2\sqrt{1+3 \cdot 5}} \\ &= \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{25}}} = \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+24}}} = \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4 \cdot 6}}} \\ &= \dots \end{aligned}$$

2° 為了說明是 1° 中的式子是可以繼續拆解下去的，我們必須證明：

$$\sqrt{1+n\sqrt{(n+2)^2}} = \sqrt{1+n\sqrt{1+(n+1)\sqrt{(n+3)^2}}}.$$

$$\begin{aligned} \text{左式} &= \sqrt{1+n\sqrt{(n+2)^2}} = \sqrt{1+n\sqrt{n^2+4n+4}} = \sqrt{1+n\sqrt{1+(n^2+4n+3)}} \\ &= \sqrt{1+n\sqrt{1+(n+1)(n+3)}} = \sqrt{1+n\sqrt{1+(n+1)\sqrt{(n+3)^2}}} = \text{右式} \end{aligned}$$

3° 由 1° 2° 可知原式成立

證明實數 $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$ 為一個有理數。

$$\begin{aligned} \text{解 } 1^\circ \quad \text{令 } x &= \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2} \\ \Rightarrow x^3 &= (\sqrt[3]{\sqrt{5}+2})^3 - (\sqrt[3]{\sqrt{5}-2})^3 - 3(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2})(\sqrt[3]{\sqrt{5}-2})\underbrace{(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2})}_{=x} \\ &= 4 - 3(1)x \Rightarrow x^3 + 3x - 4 = 0 \end{aligned}$$

$$2^\circ \quad x^3 + 3x - 4 = 0 \Rightarrow (x-1)(x^2 + x + 4) = 0 \quad [\text{係數總和為 } 0, \text{ 必有因式 } x-1]$$

$$\because x^2 + x + 4 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \quad \therefore x^2 + x + 4 = 0 \text{ 無實根}$$

故 $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2} = 1$ 為一個有理數

型五 根式估計

例 12

設 $a = \sqrt{6 + \sqrt{35}}$ ，試回答下列問題：

- (1) 若 a 介在連續整數 k 和 $k+1$ 之間，求 k 。
- (2) 若 $a + \frac{1}{a}$ 介在連續整數 n 和 $n+1$ 之間，求 n 。

解

例 13

求滿足 $\frac{n}{2} < \sqrt{9+\sqrt{50}} < \frac{n+1}{2}$ 的整數 n 值。

解

▣ 【台中一中】

化簡 $\sqrt{8+\sqrt{40+8\sqrt{5}}} + \sqrt{8-\sqrt{40+8\sqrt{5}}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答： $\sqrt{10} + \sqrt{2}$

▣ 【挑戰題】

已知方程式 $x + \sqrt{x + \frac{1}{2}} + \sqrt{x + \frac{1}{4}} = 1024$ ，求實數 x 之值。

答：992

主題 6 有理數

SBHY



1. 有理數

(1) 有理數的定義：

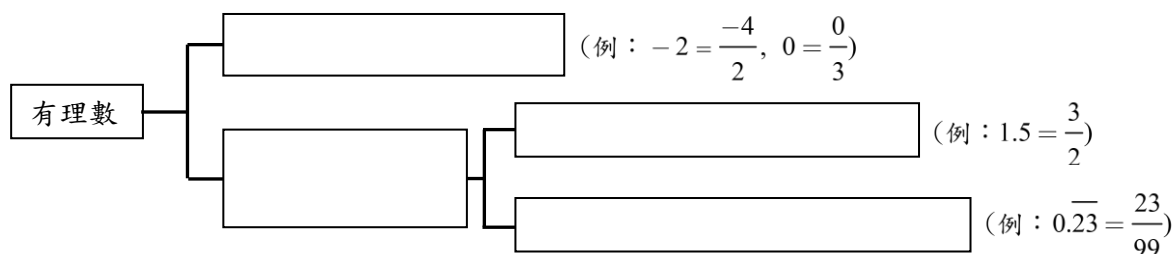
凡是可寫成_____型式且 $p, q \in \mathbb{Z}, p \neq 0$ ，這樣的數稱為有理數，常用記號_____表示有理數所形成的集合。

(2) 有理數的假設法：

由於任何有理數的表示法均不是唯一，故通常將有理數設為 $\frac{q}{p}$ ， $p, q \in \mathbb{Z}, p \neq 0$

且 以便於計算討論。

(3) 有理數的類型：



(4) 有限小數：

有理數中可化成有限小數者，其最簡分數的分母必為 。

(a, b 為正整數或 0)

【說明】

2. 有理數的性質

(1) 有理數的四則運算具封閉性：

兩個有理數相加、相減、相乘、相除 (分母 $\neq 0$)，其結果亦為有理數，此種現象，稱為有理數對加法、減法、乘法、除法具有 。

(2) 有理數具有稠密性 (denseness)：

兩相異有理數 a, b 之間 ($a < b$) 必存在另一有理數 x ，使得 $a < x < b$ 。此性質稱為有理數的 (density of rationals)。

(3) 整數的分散性：

若 a, b 為相異整數，則 $|a - b| \geq 1$ 或 ，此性質即整數的 或 。

例 1

將下列各循環小數化為最簡分數：

- (1) $0.\bar{7}$ (2) $0.\bar{73}$ (3) $0.4\bar{56}$

解

NUFE



例 2

有一個既約分數 (最簡分數) 的分子與分母相差 7，將其化為小數並將小數點第二位四捨五入到得 0.5，求此既約分數。

解

LNXB



例 3

已知 $99999 = 9 \times 41 \times 271$ ，設小數 $a = \frac{17}{40} + \frac{2}{271}$ ，試問 a 化為小數後，小數點後第 2026 位數字為_____。

解

例 4

若將 $b = \frac{1357}{3300}$ 化成小數，令 a_n 表 b 的小數點後第 n 位數字，試求以下級數之和：

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + \cdots + (-1)^{n+1} a_n + \cdots + (-1)^{101} a_{100}。$$

解

例 5

已知 x, y 都是正整數，且 $x+y$, $x-y$, xy , $\frac{x}{y}$ 四數和為 504。求整數對 (x, y) 。

解

主題 7 無理數

KAVY



1. 無理數

(1) 無理數的定義：

凡是實數中無法寫成 $\frac{q}{p}$ 的數則稱為無理數，其中 p, q 為整數且 $p \neq 0$ 。

(2) 無理數的類型：

無理數必可化成 。一般常見的圓周率 π 、自然常

數 e 、黃金比例 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 皆為無理數。

(3) 封閉性討論：

定義 $\oplus$ 為「加、減、乘、除」運算中的任一種運算且除法之除數不為 0。

① 有理數 $\oplus$ 有理數 = 有理數 (有理數對四則運算具封閉性)。

② 無理數 $\oplus$ 無理數 = 有理數或無理數 (無理數對四則運算不具封閉性)。

③ 有理數 $\oplus$ 無理數 = _____。

【說明】

無理數與無理數的加、減、乘、除可能為有理數：

$$\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0, \quad \sqrt{2} - \sqrt{2} = 0, \quad \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3, \quad \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1.$$

2. 無理數相關定理

(1) 定理一：

設 a, b 為有理數且 X 為無理數。若 $a = bX$ ，則 $a = b = 0$ 。

(2) 定理二：

已知 a, b, c, d 為有理數且 X 為無理數，若 $a + bX = c + dX$ ，則 $a = c, b = d$ 。

【說明】

$$a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2} \Rightarrow a - c = (d - b)\sqrt{2}$$

$$\text{由定理一可知 } a - c = d - b = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$$

【說例】

若 $a, b \in \mathbb{Q}$ 且 $a + b\sqrt{2} = 7 - 5\sqrt{2}$ ，則 $a = 7, b = -5$ 。

(3) 重要觀念：

- ① 已知 a, c 為有理數且 X, Y 為無理數，若 $a + X = c + Y$ ，則不一定 $a = c, X = Y$ 。
- ② 若 p 為質數，則 $\sqrt{p}$ 為無理數。
- ③ 若 a, b 皆為無理數，則 $a + b$ 與 $a - b$ 至少有一個無理數。
- ④ 若 $a + b$ 與 $a - b$ 皆為無理數，則 a, b 至少有一個無理數。

【說明 1】

在無理數舉例時，不要侷限於二次根式，可以試試 $\sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{5}, \dots$ 等等；也不必侷限於單一項的無理數，可以試試 $1 + \sqrt{2}, \sqrt{2} + \sqrt{3}, \dots$ 等等。

【說明 2】

例 1

已知 a, b 皆為實數，試問下列敘述何者正確？請選出來：

- (1) 一個有理數與一個無理數之積必為無理數
- (2) 若 $a+b$ 為有理數且 ab 為無理數，則 $a-b$ 為無理數
- (3) 存在兩個無理數 a, b 使得 $\frac{a}{b}$ 為無理數且 ab 為有理數。
- (4) 若 a^2 與 a^6 都是有理數，則 a 是有理數
- (5) 若 a^5 與 a^7 都是有理數，則 a 是有理數。

解

例 2

已知 $x^2 + px + q = 0$, $p, q \in \mathbb{Q}$, 若 $1 + \sqrt{2}$ 為其一根, 求 p, q 及另一根。

解 1° $\because 1 + \sqrt{2}$ 為有理係數方程式 $x^2 + px + q = 0$ 的一根
 $\therefore (1 + \sqrt{2})^2 + p(1 + \sqrt{2}) + q = 0 \Rightarrow (p + q + 3) + (p + 2)\sqrt{2} = 0$



例 3

若 $x, y \in \mathbb{Q}$ 且 $x\sqrt{3-2\sqrt{2}} + y\sqrt{17-12\sqrt{2}} = \sqrt{43-30\sqrt{2}}$ ，求 x 與 y 。

解

LGAM



例 4

設正實數 a 的小數部分是 b ，若已知 $a^2 + b^2 = 38$ ，求 a 與 b 之值。

解

DQHR



例 5

證明 $\sqrt{2}$ 是無理數。

證

例 6

已知 p, q 皆為無理數，試證明 $p+q, p-q$ 至少有一個無理數。

證 1° 令 $p+q, p-q$ 皆為有理數 [Step1 先否定結論]

2° 但 $p = \frac{(p+q)+(p-q)}{2}$ 為有理數 $\left(\frac{\text{有理數} + \text{有理數}}{\text{有理數}} = \text{有理數} \right)$

$$q = \frac{(p+q)-(p-q)}{2} \text{ 為有理數}$$

但題給「 p, q 皆為無理數」產生矛盾 [Step2 找到矛盾]

3° 由 1° 2° 可知假設錯誤，故 $p+q, p-q$ 至少有一個無理數。 [Step3 再扶正結論]

例 7

已知 $\sqrt{2}$ 是無理數，試證明 $\sqrt{2+\sqrt{2}}$ 是無理數。

證 1° 令 $x = \sqrt{2+\sqrt{2}}$ 且假設 x 為有理數 [Step1 先否定結論]

$$2^\circ \quad x^2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}^2 \Rightarrow x^2 = 2+\sqrt{2} \Rightarrow x^2 - 2 = \sqrt{2}$$

因為 x 為有理數且由有理數四則運算的封閉性可知 $x^2 - 2$ 亦為有理數，

但題給 $\sqrt{2}$ 是無理數，故 $x^2 - 2 = \sqrt{2}$ 矛盾 [Step2 找到矛盾]

3° 由 1° 2° 可知假設錯誤，故 $\sqrt{2+\sqrt{2}}$ 是無理數。 [Step3 再扶正結論]

主題 8 實數

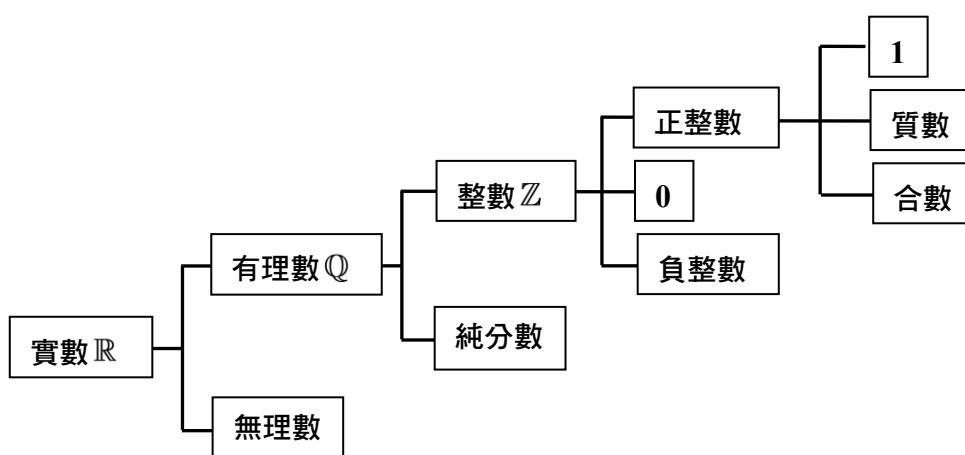
KBQS



1. 實數

(1) 實數結構：

實數僅包含有理數與無理數兩部份，其餘結構如下：



(2) 實數的四則運算具封閉性：

實數經加、減、乘、除四則運算之後其結果仍為實數 (除法之除數不可為 0)。

(3) 實數具有稠密性：

① 若 $a, b \in \mathbb{R}$ 且 $a < b$ ，則兩相異實數 a, b 間必存在另一實數 x ，使得 $a < x < b$

(取 $x = \frac{a+b}{2}$ 即可)。此性質稱為實數稠密性。

② 有理數系與無理數系同樣具有稠密性。

③ 兩相異有理數間必存在一個無理數。【高中範圍不討論其證明】

④ 兩相異無理數間必存在一個有理數。【高中範圍不討論其證明】

⑤ 無理數與有理數都是無限多個，而無理數的數量大於有理數的數量。

2. 實數的性質

(1) 實數的運算性質：

若 a, b, c 皆為實數，則 a, b, c 滿足以下性質：

- ① 加法交換律： $a+b=b+a$
- ② 乘法交換律： $ab=ba$
- ③ 加法結合律： $(a+b)+c=a+(b+c)$
- ④ 乘法結合律： $(ab)c=a(bc)$
- ⑤ 左分配律： $a(b+c)=ab+ac$
- ⑥ 右分配律： $(b+c)a=ba+ca$
- ⑦ 加法消去律： $a+c=b+c \Rightarrow a=b$
- ⑧ 乘法消去律： $ab=ac (a \neq 0) \Rightarrow b=c$

(2) 實數的次序性質：

若 a, b, c 皆為實數，則 a, b, c 滿足以下性質：

- ① 三一律： $a > b, a = b, a < b$ 三者中必有一個且僅有一個成立。
- ② 遞移律：若 $a > b, b > c$ ，則 $a > c$ 。
- ③ 加法次序性：若 $a > b$ ，則 $a+c > b+c$ 。
- ④ 乘法次序性：若 $a > b$ 且 $c > 0$ ，則 $ac > bc$ ；若 $a > b$ 且 $c < 0$ ，則 $ac < bc$ 。
- ⑤ 平方次序性：若 $a > b > 0$ ，則 $a^2 > b^2$ ；若 $a < b < 0$ ，則 $a^2 > b^2$ 。

(3) 實數運算經驗法則：

- ① 若 $a \in \mathbb{R}$ ，則 $a^2 \geq 0$ 。
- ② 若 $a, b \in \mathbb{R}$ ，且 $a^2 + b^2 = 0$ ，則 $a = b = 0$ 。
- ③ 若 $a, b \in \mathbb{R}$ ，且 $a^2 + b^2 \leq 0$ ，則 $a = b = 0$ 。
- ④ 若 $a, b, c \in \mathbb{R}$ ，且 $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$ ，則 $a = b = c$ 。
- ⑤ 若 $a, b, c \in \mathbb{R}$ ，且 $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \leq 0$ ，則 $a = b = c$ 。

(4) 真假分數結構法則：

① 假分數法則：設 a, b, x, y 為正實數且 $a > b, x > y$ ，則 $\frac{a}{b} > \frac{a+y}{b+y} > \frac{a+x}{b+x}$ 。

【說明】

$$\frac{2}{1} > \frac{3}{2} > \frac{4}{3} > \frac{5}{4}$$

② 真分數法則：設 a, b, x, y 為正實數且 $a > b, x > y$ ，則 $\frac{b}{a} < \frac{b+y}{a+y} < \frac{b+x}{a+x}$ 。

【說明】

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{4}{5}$$

(5) 運算封閉性的討論：

以下為各數系對於四則運算是否具封閉性的註記。

	加	減	乘	除 (分母不為 0)
正整數	✓		✓	
整數	✓	✓	✓	
有理數	✓	✓	✓	✓
無理數				
實數	✓	✓	✓	✓

例 1

設 x, y, z 皆為實數且 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2x - 8y + 6z + 12 = 0$ ，求 x, y, z 。

解

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2x - 8y + 6z + 12 = 0$$

WXZL



例 2

若 $a \geq -1, b \geq 2, c \geq -1$ 且 $a + b + c + 3 = 2(\sqrt{a+1} + \sqrt{b-2} + \sqrt{c+1})$ ，求 $a^2 + b^2 + c^2$ 之值。

解

▣ [衛道中學]

設 x, y 均為實數，且 $x^2 + 4xy + 6y^2 - 6x - 16y + 11 = 0$ ，則數對 $(x, y) =$ _____。

答：(1, 1)

Topic 1-2

絕對值與數線

主題 9 數線

YWFD



1. 數線

(1) 實數線的意義：

全部實數(有理數和無理數)和數線上的點形成一對一的對應；有理數對應的點，稱為**有理點**；無理數對應的點，稱為**無理點**。

(2) 實數線上的距離：

$A(x_1)$, $B(x_2)$ 在數線上兩點間距離記為 $d(A, B) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(3) 有理點的作法：

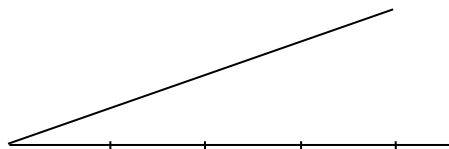
只要是有理數 $\frac{q}{p}$ 形態 (p, q 為整數) 皆可在數線上以尺規作圖求得，以 $\frac{4}{3}$ 為例：

Step 1 過 $x=0$ 作一條不與實數線重合的直線 L 。(令 $x=0$ 的位置為 P_0)

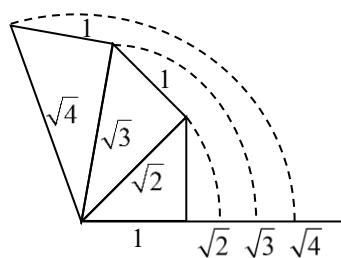
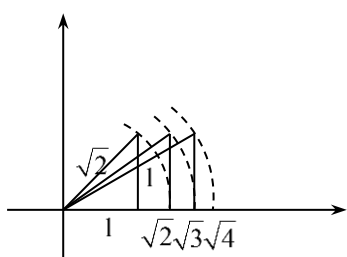
Step 2 在 L 上從 $x=0$ 開始與 x 軸正向同向取適當長三等分，分別得到 P_1 、 P_2 、 P_3 。

Step 3 連接 P_3 與 $x=4$ 並令此直線為 L_1 。

Step 4 過 P_1 作平行 L_1 的直線 L_2 ， L_2 與 x 軸的交點即為有理點 $x = \frac{4}{3}$ 。

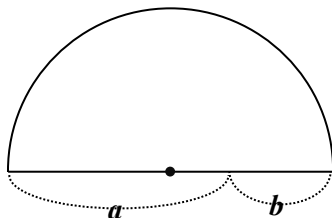


(4) 特殊無理點的作法：



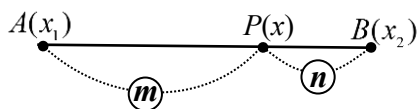
【說明】

若給定長度 a ，長度 b ，則長度 $\sqrt{ab}$ 可以尺規作圖作出：



2. 分點公式

(1) 內分點公式：



一維數線上有兩點 $A(x_1)$ 及 $B(x_2)$ ，且 $P(x)$ 在線段 $\overline{AB}$ 上， $\overline{AP}:\overline{PB}=m:n$ ，

即 P 為 $\overline{AB}$ 的內分點，則

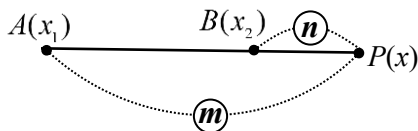
$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m + n}。$$

【說明】

$$\therefore \frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} = \frac{m}{n} \Rightarrow \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{m}{n}$$

$$\therefore nx - nx_1 = mx_2 - mx \Rightarrow x(m + n) = mx_2 + nx_1 \Rightarrow x = \frac{mx_2 + nx_1}{m + n}$$

(2) 外分點公式：



一維數線上有兩點 $A(x_1)$ 及 $B(x_2)$ 且 $P(x)$ 在線段 $\overline{AB}$ 外， $\overline{AP}:\overline{PB}=m:n$ ($m > n$)

，即 P 為 $\overline{AB}$ 的外分點，則

$$x = \frac{mx_2 - nx_1}{m - n}。$$

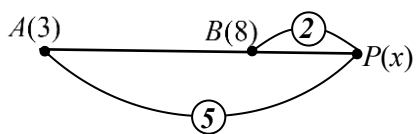
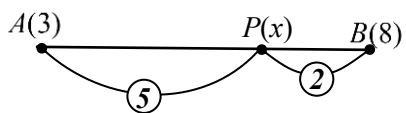
【說明】

$$\therefore \frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} = \frac{m}{n} \Rightarrow \frac{x - x_1}{x - x_2} = \frac{m}{n}$$

$$\therefore nx - nx_1 = mx - mx_2 \Rightarrow x(m - n) = mx_2 - nx_1 \Rightarrow x = \frac{mx_2 - nx_1}{m - n}$$

【說例】

已知 $A(3)$, $B(8)$, P 皆在實數線上，若 $\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} = \frac{5}{2}$ ，求 P 坐標。



例 1

已知單位長 1 時，下列何者可用尺規作圖求得長度？請選出來。

- (1) $\sqrt{2+\sqrt{2}}$ (2) $\frac{\sqrt{3+\sqrt{2}}}{\sqrt{7}+1}$ (3) $\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt{7}+1}$ (4) $\sqrt[5]{125}$ (5) $\sqrt{0.5}$ 。

解 凡正有理數 a, b 的加 $a+b$ 、減 $a-b$ 、乘 ab 、除 $\frac{a}{b}$ 及 $\sqrt{ab}$ 及上述任兩數之加、減、乘、除、及幾何平均數皆可尺規作圖得之。

例 2

已知 $x < y$ ，則以下哪些數字必定介於 x, y 之間？請選出來。

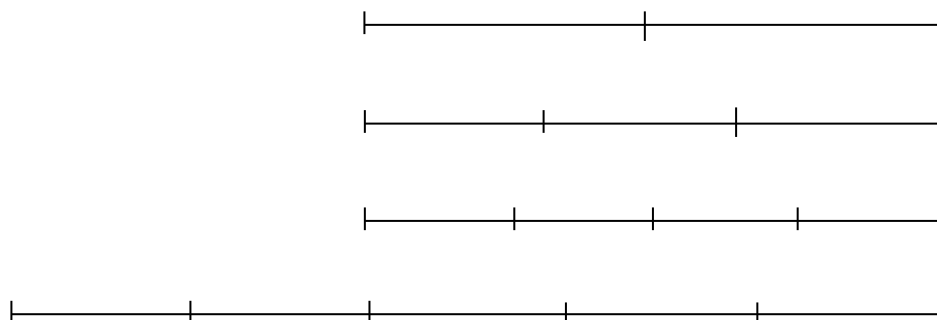
- (1) $\frac{x+y}{2}$ (2) $\frac{\sqrt{2}x+y}{\sqrt{2}+1}$ (3) $\frac{x+3y}{4}$ (4) $\frac{5x-2y}{3}$ (5) $\frac{x+3y}{3}$ 。

解

例 3

試比較 $x = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{6}}{2}$, $y = \frac{\sqrt{5} + 2\sqrt{6}}{3}$, $z = \frac{3\sqrt{5} + \sqrt{6}}{4}$, $u = \frac{5\sqrt{5} - 2\sqrt{6}}{3}$ 的大小關係。

解



主題 10 算幾不等式

BAHX



1. 平均數

(1) 算術平均數：

n 個實數 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 的算術平均數被定義為

$$A = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n}。$$

(2) 幾何平均數：

n 個正數 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 的幾何平均數被定義為

$$G = \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \dots a_n}。$$

2. 二元算幾不等式

(1) 二變數算幾不等式：

若 $a \geq 0, b \geq 0$ ，此時 $A = \frac{a+b}{2}$ ， $G = \sqrt{ab}$ ，則不等式 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 恆成立。

且只有在 $a=b$ 時，不等式的等號才會成立。

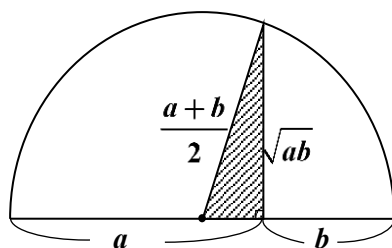
【證明 1】

$$\therefore \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0$$

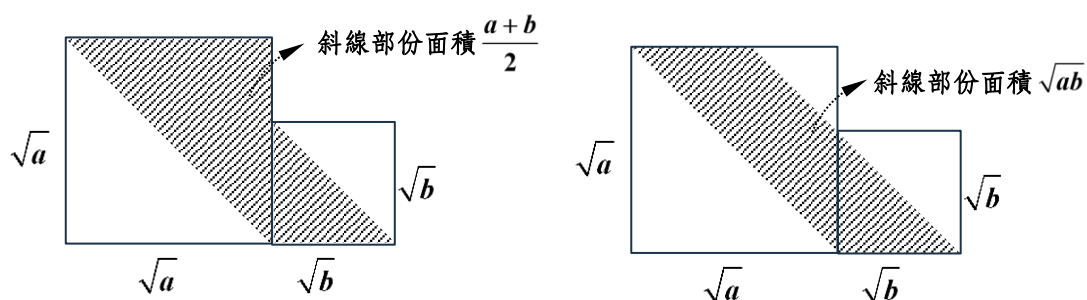
$$\therefore \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

$$\text{又 } \frac{a+b}{2} = \sqrt{ab} \text{ 時，即 } \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} = 0 \text{ 時，此時 } a=b$$

【證明 2】 *proof without words*



【證明 3】 *proof without words*



(2) 使用時機：

① 相加、相乘同時出現，欲求極值。

已知 $x + 2y = 4$ ，求 xy 的最大值。	[2]
已知 $a > 0, b > 0$ ， $a^2 + 4b^2 = 8$ ，求 ab 的最大值。	[2]
已知 $x > 0, y > 0$ 且 $xy = 100$ ，求 $\frac{1}{x} + \frac{16}{y}$ 之最小值。	$[\frac{4}{5}]$
已知 $x \geq 2, y \geq -1$ ， $(x-2)(y+1) = 54$ ，求 $3x + 2y$ 的最小值。	[40]

② 倒數相加求極值。

求 $x^2 + \frac{9}{x^2}$ 的最小值。	[6]
已知 $x > 2$ ，求 $x + \frac{4}{x-2}$ 的最小值。	[6]

3. n 元算幾不等式 [自行參考]

(1) n 變數算幾不等式：

設 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 為 n 個正數或 0，以下不等式恆成立：

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}。$$

且只有在 $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ 時，不等式的等號才會成立。

(2) 四變數算幾不等式：

假設 $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0, d \geq 0$ ，則不等式 $\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$ 恆成立。

且只有在 $a=b=c=d$ 時，不等式的等號才會成立。

【證明】

$$\frac{a+b+c+d}{4} = \frac{\frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2}}{2} \geq \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{c+d}{2}\right)} \geq \sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}} = \sqrt[4]{abcd}$$

(3) 三變數算幾不等式：

假設 $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ ，則不等式 $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ 恆成立。

且只有在 $a=b=c$ 時，不等式的等號才會成立。

【證明】

將 $d = \frac{a+b+c}{3}$ 代入 $\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$ 可得

$$\begin{aligned} \frac{a+b+c + \frac{a+b+c}{3}}{4} &\geq \sqrt[4]{abc\left(\frac{a+b+c}{3}\right)} \Rightarrow \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[4]{abc\left(\frac{a+b+c}{3}\right)} \\ \Rightarrow \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^4 &\geq abc\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \Rightarrow \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \geq abc \Rightarrow \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \end{aligned}$$

型一**基本型算幾不等式****例 1**

已知 $x > 0$, $y > 0$, $xy = 6$, 求 $2x + 3y$ 的最小值, 並求有最小值時之數對 (x, y) 。

解

CETU

**例 2**

已知 $a > 0$, $b > 0$, $a^2 + 4b^2 = 8$, 求 ab 的最大值。

解

例 3

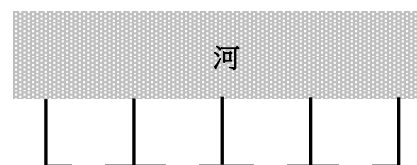
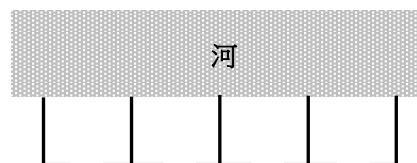
已知 $x > 0$, $y > 0$ 且 $xy = 100$ ，求 $\frac{1}{x} + \frac{16}{y}$ 之最小值。

解

例 4

如右圖，在河邊欲用圍籬圍出四間全等的矩形菜圃，且靠河的一邊不須圍籬，又圍籬共長 112 公尺。且每間菜圃都有一個 2 公尺的入口。則此四間菜圃的最大面積和為_____平方公尺。

解



型二**倒數型算幾不等式****例 5**

- (1) 已知 $x > 0$ ，證明 $x + \frac{4}{x} \geq 4$ 。
- (2) 已知 $x > -1$ ，求 $f(x) = x + \frac{9}{x+1}$ 的最小值。

解**▣ [挑戰題]**

已知 $t > 1$ ，則 $\frac{t^4}{t^2-1}$ 的最小值為_____。

答：4

例 6 | 等號成立的重要性

設 x 為任意實數，且函數 $f(x) = x^2 + 4 + \frac{1}{x^2 + 4}$ ，試回答下列問題：

- (1) 敘述「 $f(x) \geq 2$ 」是否正確？
- (2) 函數 $f(x)$ 的最小值是否為 2？試寫出原因。

解

型三 進階型算幾不等式

例 7

已知 $x \geq 2$, $y \geq -1$, $(x-2)(y+1) = \frac{27}{2}$, 求 $3x+2y$ 的最小值。

解

▣ [台中女中]

已知 a, b 為正實數，且 $2a+b=16$ ，求 $(a+1)(b+2)$ 的最大值為_____。

答：50

▣ [北一女中]

已知 $x > 3$, $y > 0$, $2x+xy-3y=60$ ，求 $2x+3y$ 的最小值。

答：36

例 8

已知 $x > 0, y > 0$ ，求 $(3x - \frac{2}{y})(2y - \frac{3}{x})$ 的最小值。

解

▣ [衛道中學]

設 $x > 0, y > 0, z > 0$ ，則 $\frac{2y-x}{x} + \frac{4(x-2y+z)}{y} - \frac{8(z-y)}{z} + 17$ 的最小值為_____。

答： $12\sqrt{2}$

主題 11 實數區間

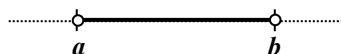
KTMS



1. 實數區間表示法

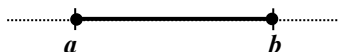
(1) 開區間：

符號 (a, b) 可以表示滿足 $a < x < b$ 的所有實數 x 形成的群體集合。



(2) 閉區間：

符號 $[a, b]$ 可以表示滿足 $a \leq x \leq b$ 的所有實數 x 形成的群體集合。

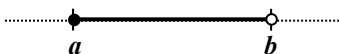


(3) 半開區間：

① 符號 $(a, b]$ 可以表示滿足 $a < x \leq b$ 的所有實數 x 形成的群體集合。

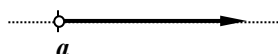


② 符號 $[a, b)$ 可以表示滿足 $a \leq x < b$ 的所有實數 x 形成的群體集合。



(4) 無限區間：

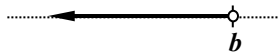
① 符號 (a, ∞) 可以表示大於 a 的所有實數所成的群體集合。



② 符號 $[a, \infty)$ 可以表示大於等於 a 的所有實數所成的群體集合。



③ 符號 $(-\infty, b)$ 可以表示小於 b 的所有實數所成的群體集合。



④ 符號 $(-\infty, b]$ 可以表示小於等於 b 的所有實數所成的群體集合。



⑤ 符號 $(-\infty, \infty)$ 表示所有實數所成的集合，或可以直接使用集合符號 $\mathbb{R}$ 。

【說例 1】

滿足 $2 < x \leq 3$ 的所有實數 x 形成的集合可以表示為_____。

【說例 2】

滿足 $x > 3$ 的所有實數 x 形成的集合可以表示為_____。

2. 實數區間的相關邏輯符號

(1) 屬於符號：

實數 x 若在區間 A 的範圍內，可以表示為 $x \in A$ 。例如 $\sqrt{2} \in (1, 5)$ 。

(2) 聯集符號：

若解答的集合為兩個以上的不連續區間，可以用聯集符號 $\cup$ 表示。

【說例】

滿足 $2 < x < 3$ 或 $4 < x < 8$ 的所有實數 x 形成的集合可以表示為_____。

例 1

已知 $2 \leq x \leq 5$, $-1 \leq y \leq 3$, 試回答下列問題：

- (1) 求 $3x - 2y$ 的範圍。 (2) 求 $x^2 + y^2$ 的範圍。
(3) 求 xy 的範圍。 (4) 求 $\frac{y}{x}$ 的範圍。

解 (1) 【法一】

$$\begin{cases} 2 \leq x \leq 5 \\ -1 \leq y \leq 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6 \leq 3x \leq 15 \\ -6 \leq -2y \leq 2 \end{cases} \Rightarrow$$

DX.YR



【法二】

比較建議使用法一，但如果你想要使用減法產生範圍，則要注意

「前項的最大值 減去 後項的最小值」才能得到最大範圍上限，同理，

「前項的最小值 減去 後項的最大值」才能得到最大範圍下限。

$$\begin{cases} 2 \leq x \leq 5 \\ -1 \leq y \leq 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6 \leq 3x \leq 15 \\ -2 \leq 2y \leq 6 \end{cases} \Rightarrow 6 - 6 \leq 3x - 2y \leq 15 - (-2)$$

$$(2) \begin{cases} 2 \leq x \leq 5 \\ -1 \leq y \leq 3 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$(3) \begin{cases} 2 \leq x \leq 5 \\ -1 \leq y \leq 3 \end{cases} \quad x \text{ 與 } y \text{ 乘積之最大值或最小值可為 } -2, 6, -5, 15$$

例 2

已知 $2 \leq x \leq 5$, $-1 \leq y \leq 3$, 試求 $xy + x - y + 1$ 的範圍並用區間集合符號表達。

解

2025^年 陳立教育

[單 一 年 度]

唯有陳立絕不混榜亂真 ★ 只有最好才能成就更好

姓名	就讀高中	錄取校系	姓名	就讀高中	錄取校系	姓名	就讀高中	錄取校系
劉○昀	港明中學	陽交大 工業工程與管理	林○悅	松山高中	成大 資訊工程學系	李○澤	家齊高中	成大 水利及海洋工程
林○泓	松山高中	陽交大 醫學生物技術暨檢驗	賴○泰	成功高中	成大 資源工程學系	張○凱	松山高中	成大 地球科學系
羅○宸	師大附中	陽交大 醫學生物技術暨檢驗	陳○瑀	南山中學	成大 資源工程學系	孫○絜	台中女中	成大 地球科學系
陳○昕	興大附中	陽交大 醫學生物技術暨檢驗	張○蓉	六和高中	成大 資源工程學系	謝○庭	台南一中	成大 地球科學系
盧○安	華江高中	陽交大 生物科技學系	許○洋	港明中學	成大 資源工程學系	蘇○熙	師大附中	成大 化學系
楊○叡	西松高中	陽交大 生物科技學系	李○軒	成功高中	成大 化學工程學系	黃○巧	中山女中	成大 化學系
莫○翔	西松高中	陽交大 生物醫學工程	王○程	成功高中	成大 化學工程學系	林○宇	南科國中	成大 化學系
林○旭	建國中學	陽交大 生物醫學工程	黃○皓	明道中學	成大 化學工程學系	黃○元	後甲國中	成大 化學系
胡○瑜	復興國中	陽交大 生物醫學工程	楊○惠	中壢高中	成大 化學工程學系	孫○涵	北大高中	成大 化學系
余○茵	北大高中	陽交大 生物醫學影像暨放射	曾○軒	武陵高中	成大 化學工程學系	彭○淇	內壢高中	成大 化學系
黃○洋	師大附中	陽交大 理學院	李○鉉	台南一中	成大 化學工程學系	黃○宸	台南女中	成大 化學系
郭○愷	成功高中	陽交大 理學院	廖○豪	忠孝國中	成大 化學工程學系	林○彤	大直高中	成大 材料科學及工程
王○婕	後甲國中	陽交大 管理科學系	黃○宏	忠孝國中	成大 化學工程學系	李○捷	復旦高中	成大 材料科學及工程
楊○幼	台南女中	陽交大 管理科學系	陳○羽	北一女中	成大 機械工程學系	劉○含	中山女中	成大 系統及船舶機電工程
劉○鴻	恆毅中學	陽交大 應用數學系	李○宏	中和高中	成大 機械工程學系	鄭○堯	板橋高中	成大 航空太空工程學系
林○任	台南二中	陽交大 應用數學系	陳○雅	北一女中	成大 機械工程學系	呂○祐	武陵高中	成大 航空太空工程學系
林○萱	華僑高中	陽交大 傳播與科技學系	歐○安	衛道中學	成大 機械工程學系	陳○宇	台南一中	成大 航空太空工程學系
施○喆	內壢高中	陽交大 傳播與科技學系	李○晴	武陵高中	成大 機械工程學系	陳○鈞	薇閣高中	成大 物理學系
易○榆	東莞台校	陽交大 傳播與科技學系	吳○晨	北一女中	成大 光電科學與工程學系	蔡○佑	和平高中	成大 物理學系
吳○諾	曉明女中	陽交大 人文社會學系	田○瑋	新民高中	成大 光電科學與工程學系	周○力	中和高中	成大 物理學系
劉○賢	建國中學	陽交大 藥學系	陳○嫣	中山女中	成大 土木工程學系	曾○瑩	中山女高	成大 物理治療學系
何○晴	北一女中	陽交大 藥學系	林○承	南山中學	成大 土木工程學系	施○均	後甲國中	成大 物理治療學系
邱○惟	板橋高中	陽交大 藥學系	簡○紋	興大附中	成大 土木工程學系	郭○岑	台南女中	成大 測量及空間資訊
曾○駿	建國中學	陽交大 藥學系	張○熙	台南一中	成大 土木工程學系	陳○文	市立大同	成大 法律學系
顏○甦	台南女中	陽交大 護理學系	林○軒	台中二中	成大 環境工程學系	林○恆	師大附中	成大 數學系
邢○亞	中山女中	陽交大 護理學系	歐○騫	建興國中	成大 工程科學系	廖○捷	台中一中	成大 數學系
周○緯	北一女中	成大 牙醫學系	邱○庭	德光中學	成大 工業與資訊管理學系	陳○安	中山女中	成大 都市計劃學系
黃○甯	台南女中	成大 電機工程學系	陳○羽	德光中學	成大 工業與資訊管理學系	蕭○東	師大附中	成大 會計學系
沈○翔	永康國中	成大 電機工程學系	黃○霖	東山中學	成大 水利及海洋工程學系	李○喬	台南女中	成大 會計學系
林○程	松山高中	成大 電機工程學系	許○維	興大附中	成大 水利及海洋工程學系	張○元	安南國中	成大 經濟學系
周○廷	師大附中	成大 資訊工程學系	許○瑜	文華高中	成大 水利及海洋工程學系	鄭○恩	成功高中	成大 企業管理學系

陳立既出 誰與爭鋒 ★ 各類榜首 盡在陳立

頂尖大學風雲榜

臺大、清大、陽交大、成大、政大 ★ Part 2

姓名	就讀高中	錄取校系	姓名	就讀高中	錄取校系	姓名	就讀高中	錄取校系
歐○霖	板橋高中	成大 企業管理學系	黃○睿	建國中學	政大 會計學系	劉○寧	北一女中	政大 傳播學院
郭○恩	武陵高中	成大 成星招生丁組	張○瑜	板橋高中	政大 會計學系	陳○安	中山女中	政大 傳播學院
張○睿	師大附中	成大 生物醫學工程學系	江○安	北一女中	政大 會計學系	許○瑄	中崙高中	政大 傳播學院
王 ○	武陵高中	成大 職能治療學系	郭○銘	文華高中	政大 會計學系	昌○寧	中山女高	政大 傳播學院
沈○霓	中山女高	成大 醫學檢驗生物技術	高○磐	海山高中	政大 經濟學系	林○亨	新民高中	政大 傳播學院
鄭○晴	台南二中	成大 護理學系	楊○惟	市立大同	政大 經濟學系	劉○安	華盛頓中學	政大 傳播學院
謝○鴿	慈濟國中	成大 護理學系	王○嫻	北一女中	政大 經濟學系	李○綾	中壢高中	政大 傳播學院
紀○甫	板橋高中	成大 歷史學系	孫○瑞	中和高中	政大 經濟學系	黃○勳	復興國中	政大 傳播學院
黃○涓	平鎮高中	成大 歷史學系	王○潔	板橋高中	政大 經濟學系	陳○璋	建國中學	政大 應用數學系
許○晴	台中女中	成大 心理學系	郭○恩	延平中學	政大 經濟學系	侯○恩	華江高中	政大 應用數學系
李○芸	恆毅中學	成大 中文系	施○澤	薇閣高中	政大 經濟學系	曾○諒	復旦高中	政大 應用數學系
童○尊	華江高中	成大 台灣文學系	沈○儀	平鎮高中	政大 統計學系	陳○安	建興國中	政大 應用數學系
許○涵	明倫高中	成大 外國語文學系	蔡○祥	建國中學	政大 資訊科學系	黃○庭	北一女中	政大 公共行政學系
黃○華	中正高中	成大 外國語文學系	連○丞	大直高中	政大 資訊科學系	李○慧	和平高中	政大 教育學系
郭○汝	板橋高中	成大 外國語文學系	魏○浩	長榮中學	政大 資訊科學系	劉○臻	板橋高中	政大 外交學系
張○瑀	台中女中	成大 外國語文學系	陳○廣	板橋高中	政大 風險管理與保險	賴○安	板橋高中	政大 外交學系
俞○軒	建國中學	政大 法律學系	陳○澤	中和高中	政大 風險管理與保險	陳○宣	台南女中	政大 外交學系
林○婷	薇閣高中	政大 法律學系	林○紘	市立大同	政大 企業管理學系	羅○均	新竹女中	政大 心理學系
陳○灝	建國中學	政大 法律學系	彭○鴻	海山高中	政大 企業管理學系	王○桓	成功高中	政大 心理學系
孫○霖	成功高中	政大 法律學系	陳○榛	北一女中	政大 企業管理學系	陳○靜	中山女中	政大 中國文學系
劉○誠	台中一中	政大 法律學系	劉○嘉	中壢高中	政大 企業管理學系	吳○霆	師大附中	政大 英國語文學系
陳○妘	新莊高中	政大 社會學系	楊○安	曉明女中	政大 企業管理學系	林○潔	北一女中	政大 英國語文學系
吳○恩	台南一中	政大 金融學系	林○欣	北一女中	政大 資訊管理學系	鄭○筠	景美女中	政大 日本語文學系
許○菱	中山女中	政大 金融學系	徐○雙	中山女中	政大 資訊管理學系	許 ○	彭藝高中	政大 日本語文學系
黃○綺	台中女中	政大 金融學系	黃○妍	板橋高中	政大 資訊管理學系	黃○容	中和高中	政大 韓國語文學系
黃○紘	松山高中	政大 財政學系	王○悠	成淵高中	政大 地政學系	余○媛	板橋高中	政大 土耳其語文學系
張○暄	中和高中	政大 財政學系	林○宇	松山高中	政大 地政學系	陳○婷	北一女中	政大 阿拉伯語文學系
林○捷	政大附中	政大 財務管理學系	紀○芸	薇閣高中	政大 地政學系	林○如	永春高中	政大 阿拉伯語文學系
廖○綸	北一女中	政大 國際經營與貿易	謝○柔	台中女中	政大 地政學系	林○彤	永春高中	政大 阿拉伯語文學系
蔡○瑟	崇明國中	政大 國際經營與貿易	鄭○仁	成功高中	政大 傳播學院	陳○驊	南港高中	政大 斯拉夫語文學系
李○嫻	板橋高中	政大 會計學系	嚴○溱	中山女中	政大 傳播學院	陳○智	台中二中	政大 東南亞語文學系

全國最大 ★ 最專業的連鎖 K12 教育集團

主題 12 絕對值



1. 絕對值

(1) 代數意義：

$$\text{絕對值函數定義為 } |x| = \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases}$$

(2) 對應數線上的幾何意義：

- ① $|x|$ 表示：實數線上 x 到原點的距離。
- ② $|x_1 - x_2|$ 表示：實數線上 x_1 到 x_2 的距離。

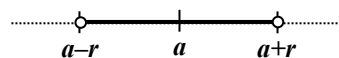
(3) 絕對值基本運算：

- ① 對於任意實數 a, b 來說， $|ab| = |a||b|$ 。
- ② 對於任意實數 a, b 來說， $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ ($b \neq 0$)。

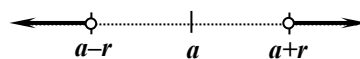
2. 數線不等式

(1) 去絕對值：

$$\textcircled{1} \quad |x - a| < r \quad (r > 0) \Rightarrow a - r < x < a + r$$



$$\textcircled{2} \quad |x - a| > r \quad (r > 0) \Rightarrow x < a - r \text{ 或 } x > a + r$$



【說例 1】

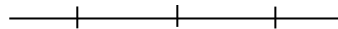
$$|x| < 2 \Rightarrow$$

【說例 2】

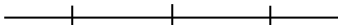
$$|x| \geq 3 \Rightarrow$$

【說例 3】

$$|x-5| \leq 2 \Rightarrow$$

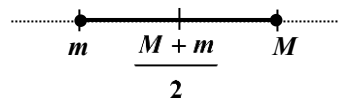
**【說例 4】**

$$|x-1| \geq 3 \Rightarrow$$

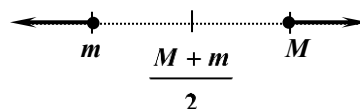


(2) 造絕對值：

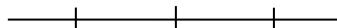
$$\textcircled{1} \quad m \leq x \leq M \Rightarrow \left| \quad \quad \quad \right| \leq$$



$$\textcircled{2} \quad x \leq m \text{ 或 } x \geq M \Rightarrow \left| \quad \quad \quad \right| \geq$$

**【說例】**

$$6 \leq x \leq 10 \Rightarrow$$



3. 三角不等式

(1) 實數三角不等式：

對於任意實數 a, b ，下列三角不等式恆成立：

$$\boxed{|a| + |b| \geq |a+b| \geq ||a| - |b||} \quad .$$

【證明】

分別將 $|a| + |b|$, $|a+b|$, $||a| - |b||$ 平方：

$$(|a| + |b|)^2 = a^2 + b^2 + 2|ab| \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$||a| - |b||^2 = a^2 + b^2 - 2|ab| \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

在 $\textcircled{1}\textcircled{2}\textcircled{3}$ 三式中比較 $|ab|$, ab , $-|ab|$

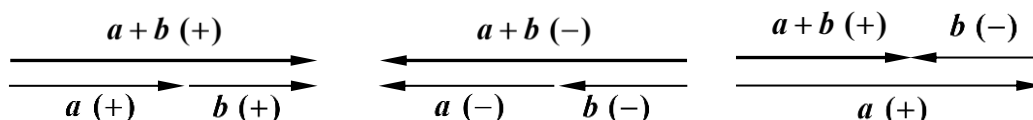
由於 $|ab| \geq ab \geq -|ab|$ ，故 $|a| + |b| \geq |a+b| \geq ||a| - |b||$

(2) 等號成立：

① 當 時， $|a| + |b| = |a+b|$ 。

② 當 時， $|a+b| = ||a| - |b||$ 。

【說明】



4. 絕對值方程式的幾何觀點

(1) 絕對值的幾何意義：

除了利用代數方式解絕對值方程式之外，由於 $|x-\alpha|$ 表示 x 與 α 在一維實數線上之距離，建議先從數線的距離觀點下手，尤其是方程式的絕對值過多時。

(2) 判定未知數的位置：

從距離觀點處理絕對值時，有些數值可以讓我們提前判定未知數的大概區間。

① $|x-1| + |x-5| = 8$



② $|x| + |x-1| + |x-5| = 20$



5. 偏差絕對值函數

(1) 偏差絕對值函數：

$f(x) = |x-\alpha_1| + |x-\alpha_2| + \cdots + |x-\alpha_n|$ ($\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 為實數) 稱為偏差絕對值函數。

(2) 中位數法則：

已知 $f(x) = |x-\alpha_1| + |x-\alpha_2| + \cdots + |x-\alpha_{n-1}| + |x-\alpha_n|$ 且 $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots \leq \alpha_{n-1} \leq \alpha_n$ ，則 $f(x)$ 在 $x = Me$ 時有最小值，其中 Me 為 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$ 之中位數。

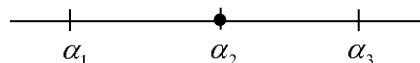
① 奇數個絕對值的中位數法則：

$f(x) = |x - \alpha_1| + |x - \alpha_2| + |x - \alpha_3|$ ($\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3$) 在 $x = \alpha_2$ (中位數) 時有 $f(x)$ 的最小值 $f(\alpha_2)$ 。

【說明】

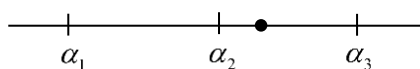
當 $x = \alpha_2$ 時，

$$f(\alpha_2) =$$



當 $x = p \neq \alpha_2$ 時，

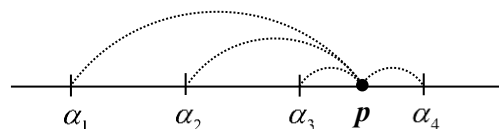
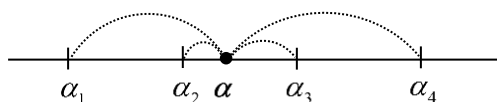
$$f(p) =$$



② 偶數個絕對值的中位數法則：

$f(x) = |x - \alpha_1| + |x - \alpha_2| + |x - \alpha_3| + |x - \alpha_4|$ ($\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3 \leq \alpha_4$) 對於區間 $[\alpha_2, \alpha_3]$ 內的任何 α 值，都有 $f(x)$ 的最小值 $f(\alpha)$ 。

【說明】



當 $x = \alpha$ 時 ($\alpha_2 \leq \alpha \leq \alpha_3$)，

$$f(\alpha) = |\alpha - \alpha_1| + |\alpha - \alpha_2| + |\alpha - \alpha_3| + |\alpha - \alpha_4| = |\alpha_4 - \alpha_1| + |\alpha_3 - \alpha_2|$$

當 $x = p$ 時 (p 不在區間 $[\alpha_2, \alpha_3]$ 內)，

$$f(p) = |p - \alpha_1| + |p - \alpha_2| + |p - \alpha_3| + |p - \alpha_4| \geq |\alpha_4 - \alpha_1| + |\alpha_3 - \alpha_2| = f(\alpha) \quad \text{【三角不等式】}$$

【說例 1】

$$f(x) = |x - 1| + |x - 3| + |x - 8| \text{ 有 } \min f(x) = \underline{\hspace{2cm}}, \text{ 此時 } x = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【說例 2】

$$f(x) = |x - 1| + |x - 2| + |x - 3| + |x - 5| \text{ 有 } \min f(x) = \underline{\hspace{2cm}}, \text{ 此時 } \underline{\hspace{2cm}}.$$

6. 絕對值方程式的處理原則

(1) 絕對值問題常用方法：

①

②

③

④

(2) 題型分類：

題型	$ A \leq B $
說例	$ x-1 \leq 3x-4 $
處理原則	[法一] 兩側直接平方 [法二] 討論 $x < 1$, $1 \leq x < \frac{4}{3}$, $x \geq \frac{4}{3}$

題型	$ A \geq B$ $ A \leq B$
說例	$ x+1 \geq 2x+3$
處理原則	討論 $x < -1$, $x \geq -1$

題型	$ A + B \leq C $ $ A + B \geq C $
說例	$ x-1 + x-2 \leq 2x-3 $
處理原則	[法一] 看成 $x-1 + x-2 \leq (x-1) + (x-2)$ 再由三角不等式 $x-1 + x-2 \geq (x-1) + (x-2)$ 處理之 [法二] 討論 $x < 1$, $1 \leq x < \frac{3}{2}$, $\frac{3}{2} \leq x < 2$, $x \geq 2$

題型	多絕對值
說例	$ x-1 + x-2 + x-5 =20$
處理原則	[法一] 看成 x 分別到 1, 2, 5 的距離總和為 20， 必在 1 的左側或 5 的右側 [法二] 討論 $x < 1$, $1 \leq x < 2$, $2 \leq x < 5$, $x \geq 5$

型一 絕對值方程式

例 1

各校段考必考題型

$|ax+1| \leq b$ 之解為 $-1 \leq x \leq 5$ ，求 a, b 之值。

解 【常見錯誤】

$$\begin{aligned} |ax+1| \leq b &\Rightarrow -b \leq ax+1 \leq b \Rightarrow -b-1 \leq ax \leq b-1 \\ &\Rightarrow \frac{-b-1}{a} \leq x \leq \frac{b-1}{a} \quad [\text{錯在哪?}] \end{aligned}$$

【正解】

VEIA



例 2 平方使用時機

試解不等式 $|2x-1| \geq |x-5|$ 。

解

▣ 【衛道中學】

若實數 a 滿足 $1 < |a-1| \leq 2$ 且 $|x-a| = 3|x-9|$ ，則實數 x 的最大值為_____。

答：14

例 3

試解不等式 $3 < |2x - 1| < 5$ 。

解 【法一】

$$1^\circ \quad \text{Case 1} \quad \begin{cases} 2x - 1 \geq 0 \\ 3 < 2x - 1 < 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 2 < x < 3 \end{cases}$$

$$\text{Case 2} \quad \begin{cases} 2x - 1 < 0 \\ 3 < -(2x - 1) < 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

2° 由以上可知所求為

【法二】

TFNJ



例 4 多重絕對值

請問滿足絕對值不等式 $||x - 1| - 4| \leq 3$ 的實數 x 解之範圍。

答

▣ 【台中一中】

試問滿足 $||x - 1| - 3| \leq 4$ 的整數 x 值共有_____個。

答：13

例 5

已知方程式 $\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{x^2-2x+1}=6$ ，求實數 x 。

解 將原方程式改寫為：

從距離大小與數線上的位置，其實可以看得出 x 在 1 的左側或在 2 的右側；
若是其他方程式數據，可能較難觀察 x 大概的位置，所以我們以通則來分析：

AGHB



例 6

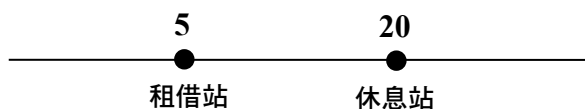
已知方程式 $|x-1|+|x-2|+|x-6|=15$ ，求實數 x 。

解

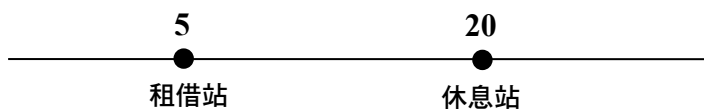
例 7

各校重要考題

如下圖所示，在一條東西向的筆直景觀道路上，有一家電動機車租借站與休息站，分別位於道路里程 5 與 20 的位置。遊客租借電動機車騎乘時，偶爾會在路上耗盡電力而需要道路救援。由於人力與成本的考量，若「救援位置與租借站的距離」再加上「救援位置與休息站距離的 1.5 倍」不大於 30 時，可以免費服務，則可以免費救援的里程區間為_____。



解



▣ [台中女中]

解不等式 $|x+2| - |x-1| < x+1$ 。

答： $x > 2$ 或 $-4 < x < 0$

型二**偏差絕對值函數****例 8**

係數是 1 要如何處理?

求使得方程式 $|x-1|+|x-2|+|x-5|=k$ 有實數 x 解的 k 範圍。**解****例 9**

係數是 1 要如何處理?

求解不等式 $|x-1|+|x-5|>3$ 。**解****例 10**

係數不是 1 要如何處理?

求 $f(x)=3|x-1|+|x-2|+2|x-4|+|x-5|$ 的最小值與對應的 x 值。**解****▣ [挑戰題]**求 $f(x)=|x-1|+\frac{1}{2}|x-2|+\frac{1}{3}|x+3|$ 的最小值與對應的 x 值。答： $\frac{11}{6}$ ，此時 $x=1$

下列各方程式中，請選出有實數解的選項：

(1) $|x| + |x-5| = 1$

(2) $|x| + |x-5| = 6$

(3) $|x| - |x-5| = 1$

(4) $|x| - |x-5| = 6$

(5) $|x| - |x-5| = -1$ 。

解

$|x| + |x-5|$ 可以表示一維數線上，「 x 至原點的距離」與「 x 至 5 的距離」之和

同理， $|x| - |x-5|$ 可以表示一維數線上，「 x 至原點的距離」與「 x 至 5 的距離」之差

由於 $|x| + |x-5|$ 的最小值為 5，故方程式 $|x| + |x-5| = k$ 有實數 x 解的條件是_____。

接下來，我們來討論方程式 $|x| - |x-5| = k$ 有實數 x 解的條件：

圖 示			
$a - b$			

由於 $|x| - |x-5| = k$ 的最小值為 -5 ，最大值為 5 ，

故方程式 $|x| - |x-5| = k$ 有實數 x 解的條件是_____。

故選_____。

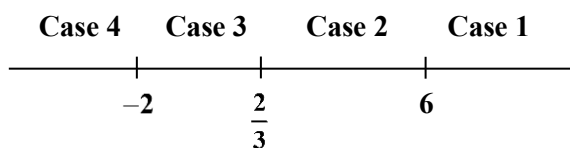
型三 三角不等式

例 12

試解 $|x-6|+|2x+4|\leq|3x-2|$ 之 x 的實數範圍。

解 【法一】討論

可以把實數區間分成四個區域：



Case 1 當 $x \geq 6$ 時, $\begin{cases} x \geq 6 \\ (x-6) + (2x+4) \leq (3x-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 6 \\ x \text{ 為任意實數} \end{cases} \Rightarrow x \geq 6$

Case 2 當 $\frac{2}{3} \leq x < 6$ 時, $\begin{cases} \frac{2}{3} \leq x < 6 \\ (6-x) + (2x+4) \leq (3x-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{3} \leq x < 6 \\ x \geq 6 \end{cases} \Rightarrow x \text{ 無解}$

Case 3 當 $-2 \leq x < \frac{2}{3}$ 時, $\begin{cases} -2 \leq x < \frac{2}{3} \\ (6-x) + (2x+4) \leq (2-3x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 \leq x < \frac{2}{3} \\ x \leq -2 \end{cases} \Rightarrow x = -2$

Case 4 當 $x < -2$ 時, $\begin{cases} x < -2 \\ (6-x) + (-2x-4) \leq (2-3x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -2 \\ x \text{ 為任意實數} \end{cases} \Rightarrow x < -2$

由以上可知實數 x 範圍為 $x \leq -2$ 或 $x \geq 6$

【法二】三角不等式

$$\because | \quad | + | \quad | \geq | \quad |, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

但題給 $| \quad | + | \quad | \leq | \quad |$

$\therefore$

▣ [挑戰題]

試解 $|2x-6|+|x-2|\leq|x-4|$ 之 x 的實數範圍。

答： $2\leq x\leq 3$

Topic 1-3

指 數

主題 13 指數律與基本運算

IUNG



1. 指數與底數

(1) 指數式：

對於任何 a^x 型式寫法，我們稱為**指數式**，其結果稱為**冪 (power)**。稱 a 為

(base number)，稱 x 為 (exponent)。但 0^0 無意義。

【說例】

1024 可寫成 2^{10} 型式，其中 2 為底數，10 為指數。

(2) 指數的討論：

若 $a > 0$ ，以下就不同的實數指數 x 來討論 a^x 的意義。

① 若指數為**正整數 n** ，則 $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\text{個}}$ 。例如 $5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ 。

② 若指數為**0**，則 $a^x = a^0 = 1$ 。

③ 若指數為**負整數 $-n$** ，則 $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ 。

④ 若指數為**正有理數 $\frac{1}{n}$** (n 為正整數)，則 $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ ，例如 $a^{\frac{1}{5}} = \text{}$ 。

⑤ 若指數為**正有理數 $\frac{m}{n}$** (m, n 皆為正整數)，則 $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$ 。

【說例】

$$a^{\frac{7}{4}} \begin{cases} \nearrow \text{} = \text{} \\ \searrow \text{} = \text{} \end{cases}$$

⑥ 若指數為**正無理數**，則利用數列的極限來定義無理數指數，如 $a^{\sqrt{2}}$ 與 a^{π} 。

【說例】

$\sqrt{2}=1.4142\cdots$ ，數列 $a^{1.4}, a^{1.41}, a^{1.414}, a^{1.4142}, \cdots$ 的極限定義為 $a^{\sqrt{2}}$ 。

⑦ 若指數為**負數** $-n$ ，則 $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ 。例如 $a^{\frac{-5}{7}} =$ 。

(3) 指數的計算機運算：

① 1.01^{365} 如何求值：

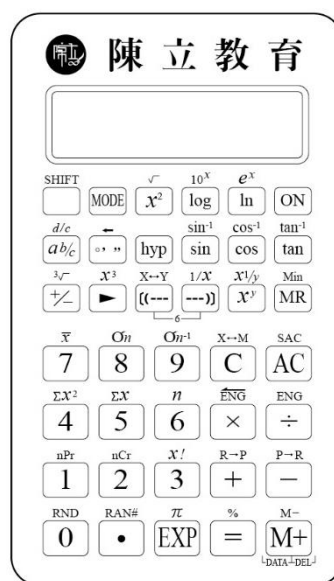
⇒ 1.01 ⇒ x^y ⇒ 365 ⇒ =

② $(0.99)^{365}$ 如何求值：

⇒ 0.99 ⇒ x^y ⇒ 365 ⇒ =

③ $5^{0.5}$ 如何求值：

⇒ 5 ⇒ x^y ⇒ 0.5 ⇒ =



2. 實數指數運算

(1) 指數律：

對於 $a > 0$, $b > 0$, x, y 為實數，以下指數律恆成立：

① $a^x \cdot a^y =$

② $\frac{a^x}{a^y} =$

③ $(a^x)^y =$

④ $(ab)^x =$

⑤ $\left(\frac{a}{b}\right)^x =$

【說例 1】

$$\sqrt[3]{\sqrt{a}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

【說例 2】

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a} = \underline{\hspace{2cm}}$$

(2) 指數式相等的處理原則：

① 指數順序性：

$$a^{x^y} = \boxed{\hspace{2cm}} \quad (a > 0, x, y \text{ 為實數})$$

【說例】

$$2^{3^2} \times 4^{2^5} =$$

② 底數相同的指數式怎麼討論？

若 $a^x = a^y$ ($a > 0$ 且 x, y 為實數)，必須討論以下情形：

Case 1 若 $a = 1$ ，則 x 不一定等於 y ，例如 $1^3 = 1^4$ 或 $1^4 = 1^4$ 。

Case 2 若 $a \neq 1$ ，則 $x = y$ 。

③ 底數不同的指數式怎麼討論？

若 $a^x = b^y$ ($a > 0, b > 0$ 且 x, y 為實數)，先考慮是否可化成同底數；

若不能化同底數，則討論以下情形：

Case 1 若 $a^x = 1$ 且 $a^x = b^y$ ，則 $b^y = 1$ ，故 $b = 1$ 或 $y = 0$ 。

Case 2 若 $a^x \neq 1$ 且 $a^x = b^y$ ，則我們最多只能得到 $(a^x)^{\frac{1}{x}} = (b^y)^{\frac{1}{y}}$ ，即 $a = b^{\frac{y}{x}}$ 。

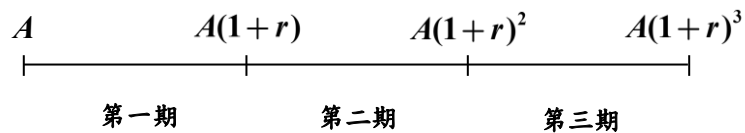
【說明】

若 $3^x = 4^y$ ，則 $x = y = 0$ 或 $3 = 4^{\frac{y}{x}}$ 。

3. 利率概念

(1) 複利的概念：

若將本金 A 元存入銀行，期利率為 r ，如以**複利**計算，且每期複利一次， n 期過後可得本利和 $A(1+r)^n$ 元。



【說例】

若將本金 A 元存入銀行，年利率為 3%，每年複利一次，5 年過後可得本利和為_____元。

(2) 利率分割：

若將本金 A 元存入銀行，年利率為 12%，每期以複利計息， n 年過後：

- ① 若**每年**為一期，則 n 年過後可得本利和_____元。
- ② 若**每半年**為一期，則 n 年過後可得本利和_____元。
- ③ 若**每季**為一期，則 n 年過後可得本利和_____元。

型一 指數式的運算

例 1

化簡下列各式：

$$\begin{array}{ll} (1) [a^3 \cdot (a^{-2})^4]^{-1} & (2) \sqrt[3]{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[5]{a^4}}} \\ (3) (2+\sqrt{3})^8(2-\sqrt{3})^{10} & (4) 729^{\frac{-1}{3}} + 32^{\frac{3}{5}} + \left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{-1}{3}} \end{array}$$

解 (1) $[a^3 \cdot (a^{-2})^4]^{-1} = (a^3 \cdot a^{-8})^{-1} = (a^{-5})^{-1} = a^5$

$$(2) \sqrt[3]{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[5]{a^4}}} =$$

$$\begin{aligned} (3) (2+\sqrt{3})^8(2-\sqrt{3})^{10} &= (2+\sqrt{3})^8(2-\sqrt{3})^8 \cdot (2-\sqrt{3})^2 = ((2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}))^8 \cdot (4+3-4\sqrt{3}) \\ &= (4-3)^8 \cdot (7-4\sqrt{3}) = 7-4\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) 729^{\frac{-1}{3}} + 32^{\frac{3}{5}} + \left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{-1}{3}} &= (3^6)^{\frac{-1}{3}} + (2^5)^{\frac{3}{5}} + (3^{-3})^{\frac{-1}{3}} = 3^{-2} + 2^3 + 3 \\ &= \frac{1}{9} + 8 + 3 = \frac{100}{9} \end{aligned}$$

⇒ 這種指數式的化簡，計算不難，但需要的是細心。

很多學校期中考的計算量都考到像下面這一題的難度。同學們來試一下吧！

$$\text{已知 } \frac{\sqrt[7]{4\sqrt[4]{16^3 \cdot 8^{-2}}}}{\sqrt[3]{2^2 \sqrt{2^{-3}}}} = \left(\frac{1}{16}\right)^n, \text{ 試求 } n \text{ 之值。}$$

$$\text{答：} \frac{1}{24}$$



例 2

已知 $x \geq 0$ 且 $x^{2^x} = x^{16}$ ，求 x 之值。

解

例 3

若 $3^{-2x} = 4$ ，求 9^{x-1} 之值。

解

例 4

若 $17^{2x} = 15$ 且 $15^{3y} = 17$ ，試求 xy 之值。

解

例 5

已知 n 為自然數，且 $n < 6^{\frac{5}{3}} < n+1$ ，試求 n 之值。

解

例 6

已知 $8^x = 9^y = 6^z$ ，若 $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = \frac{k}{z}$ ，求 k 之值。

解

ASGW



例 7

已知 $(2.5)^x = (0.025)^y = 1000$ ，求 $\frac{1}{x} - \frac{1}{y}$ 之值。

解

CDNT



型二 雙曲函數

例 8

各校段考重要題型

設 $a^{2x} = \sqrt{2} + 1$ ，則 $\frac{a^{3x} + a^{-3x}}{a^x + a^{-x}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解

HWQV



回 [建國中學]

a, b 為實數，已知 $25^a = \sqrt{3} - 1$ ，及 $\frac{125^a + 125^{-a}}{5^a + 5^{-a}} = b \cdot 25^a$ ，試求 b 之值為_____。

答： $\frac{3}{2}$

例 9

各校段考重要題型

設 $a > 0$ 且 $a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{-1}{2}} = 3$ ，試求下列各式之值：

(1) $a + a^{-1}$ (2) $a^2 + a^{-2}$ (3) $a^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{-3}{2}}$ (4) $a^{\frac{1}{4}} + a^{\frac{-1}{4}}$

解



WUGX

▣ [台中女中]

設 $a^x - a^{-x} = 1$ ，則 $\frac{a^{3x} - a^{-3x}}{a^x + a^{-x}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答： $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

▣ [建國中學]

設 $a > 0$ ，且 $a^{2x} = 7 - 4\sqrt{3}$ ，則 $\frac{a^{4x} + a^{-4x}}{a^x + a^{-x}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答：48.5

型三 複利問題

例 10

小沂參加銀行存款，約定以年利率 1% 的複利，一年為一期計息。若小沂在今年年初存入 10000 元，則 15 年後可得本利和 _____ 元。 [計算機操作]

解



例 11

假設某個國家 40 年後，人口將**增加為**目前的 2 倍 (經過相同時間成長倍數相同)。

- (1) 10 年後人口是目前的幾倍？
- (2) 5 年後人口是目前的幾倍？

解



例 12

設於某項新實驗中，細菌數 1 日後增加 a 倍，且已知 3 日後細菌數為 200000， $4\frac{1}{2}$ 日後其數為 1600000，求當細菌數到達 800000 時所需日數。

解

DHWE



型四**半衰期問題****例 13**

放射性物質的質量 (或濃度) 衰變成原本的一半時所需的時間，我們稱為「半衰期」。

已知某放射性物質，4 天後剩下 40 克，6 天後剩下 20 克，試回答下列問題：

(1) 此放射性物質的半衰期為 _____ 天。

(2) 此放射性物質原有 _____ 克。

解

設剛開始時，質量為 A ，且該物質半衰期為 t 天

ZCAB



放射性物質的半衰期 T 定義為每經過時間 T ，該物質的質量會衰退成原來的一半。今有甲、乙兩種物質，開始記錄時甲物質的質量是乙物質的兩倍，而已知甲的半衰期為 15 小時，且經過 60 小時後，甲物質的質量是乙物質的 8 倍。則乙物質的半衰期是_____小時。

解 設剛開始時，甲、乙的質量分別為 $2A$ 、 A ，且乙的半衰期為 t 小時

▣ 【台南女中】

放射性物質的半衰期 T 定義為每經過時間 T ，該物質的質量會衰退成原來的一半。鉛製容器中有兩種放射性物質 A 、 B ，開始記錄時容器中物質 B 的質量為物質 A 的 4 倍，而 48 天後兩種物質的質量相同。已知物質 A 的半衰期為 12 天，請問物質 B 的半衰期為幾天？

- (1) 2 天 (2) 4 天 (3) 6 天 (4) 8 天 (5) 10 天 。
- 答：(4)

型五**傳染病模型問題****例 15**

某一類的傳染病接觸，感染後人便會產生抗體而終身免疫，此類的傳染病的感染率 $I(t)$ 定義為

$$I(t) = \frac{\text{在時間 } t \text{ 時被感染過的人數}}{\text{這城市的總人數}}。$$

根據衛生組織的調查研究建立了一個關於 $I(t)$ 的數學模型： $I(t) = \frac{1}{1+a \cdot 7^{-bt}}$ 。某種此

類的傳染病在某個城市蔓延，剛開始 (即 $t=0$ 週時)，約有 2% 的人口被感染，當 $t=3$ 週，約有 12.5% 的人口被感染，試回答下列問題：

- (1) 數對 $(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
- (2) 請問 9 週之後，該城市約有多少比例的人口被感染此傳染病？

解

BCBV



型六 進階技巧型問題

例 16

自行參考

已知 n 為正整數，且 $x = \frac{1}{2}(5^{\frac{1}{n}} + 5^{\frac{-1}{n}})$ ，求 $(x + \sqrt{x^2 - 1})^n$ 之值。

解 1° $(a^x + a^{-x})^2 = (a^x - a^{-x})^2 + 4$

$$\Rightarrow \left(\frac{a^x + a^{-x}}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^x - a^{-x}}{2}\right)^2 + 1$$

2° $x = \frac{5^{\frac{1}{n}} + 5^{\frac{-1}{n}}}{2} \Rightarrow x^2 = \left(\frac{5^{\frac{1}{n}} + 5^{\frac{-1}{n}}}{2}\right)^2 = \left(\frac{5^{\frac{1}{n}} - 5^{\frac{-1}{n}}}{2}\right)^2 + 1$

$$\therefore x^2 - 1 = \left(\frac{5^{\frac{1}{n}} - 5^{\frac{-1}{n}}}{2}\right)^2$$

3° $(x + \sqrt{x^2 - 1})^n = \left[\frac{5^{\frac{1}{n}} + 5^{\frac{-1}{n}}}{2} + \sqrt{\left(\frac{5^{\frac{1}{n}} - 5^{\frac{-1}{n}}}{2}\right)^2}\right]^n$

$$= \left(\frac{5^{\frac{1}{n}} + 5^{\frac{-1}{n}}}{2} + \left|\frac{5^{\frac{1}{n}} - 5^{\frac{-1}{n}}}{2}\right|\right)^n \quad \left(\because \frac{1}{n} > \frac{-1}{n} \therefore 5^{\frac{1}{n}} > 5^{\frac{-1}{n}}\right)$$

$$= \left(\frac{5^{\frac{1}{n}} + 5^{\frac{-1}{n}}}{2} + \frac{5^{\frac{1}{n}} - 5^{\frac{-1}{n}}}{2}\right)^n = (5^{\frac{1}{n}})^n = 5$$

▣ 觀察以下的類題，你或許會有一些推論：

① 已知 n 為正整數，且 $x = \frac{1}{2}(3^{\frac{1}{n}} + 3^{\frac{-1}{n}})$ ，則 $(x + \sqrt{x^2 - 1})^n = 3$ 。

② 已知 n 為正整數，且 $x = \frac{1}{2}(7^{\frac{1}{n}} + 7^{\frac{-1}{n}})$ ，則 $(x + \sqrt{x^2 - 1})^n = 7$ 。

③ 已知 n 為正整數，且 $x = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{-1}{n}}\right)$ ，則 $(x + \sqrt{x^2 - 1})^n = 3$ 。

④ 已知 n 為正整數，且 $x = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{-1}{n}}\right)$ ，則 $(x + \sqrt{x^2 - 1})^n = 7$ 。



例 17

已知 $f(x) = \frac{4^x}{4^x + 2}$ ，求 $f(\frac{1}{101}) + f(\frac{2}{101}) + f(\frac{3}{101}) + \cdots + f(\frac{100}{101})$ 之值。

解

KFZS



例 18

求 $\frac{9^{\frac{1}{9}}}{9^{\frac{1}{9}} + 3} + \frac{9^{\frac{2}{9}}}{9^{\frac{2}{9}} + 3} + \frac{9^{\frac{3}{9}}}{9^{\frac{3}{9}} + 3} + \cdots + \frac{9^{\frac{6}{9}}}{9^{\frac{6}{9}} + 3} + \frac{9^{\frac{7}{9}}}{9^{\frac{7}{9}} + 3} + \frac{9^{\frac{8}{9}}}{9^{\frac{8}{9}} + 3}$ 之值。

解

Topic 1-4

常用對數

主題 14 常用對數



1. 對數與對數律

(1) 對數符號：

設 a 為非 1 之正數，當 $b = a^x$ 時，定義 $x = \log_a b$ 。其中 $\log_a b$ 稱為

「以 a 為底數，以 b 為真數的對數」。

(2) 對數表示訓練：

① $2^x = 3 \Leftrightarrow$ [想成： x 是一個「把 2 變成 3」的次方]

② $3^x = 7 \Leftrightarrow$ [想成： x 是一個「把 3 變成 7」的次方]

③ $10^x = 5 \Leftrightarrow$ [想成： x 是一個「把 10 變成 5」的次方]

④ $2^{\log_2 3} =$ [想成：這個指數會「把 2 變成 3」]

⑤ $3^{\log_3 7} =$ [想成：這個指數會「把 3 變成 7」]

(3) 對數還原指數式訓練：

① $x = \log_2 3 \Leftrightarrow$

② $x = \log_5 7 \Leftrightarrow$

(4) 常用對數：

以 10 為底數的對數稱之，通常省略底數 10，例： $\log_{10} 2 = \log 2$ 。

(5) 10 的幕次之對數值：

$\log \frac{1}{100}$	$\log \frac{1}{10}$	$\log 1$	$\log 10$	$\log 100$	$\log 1000$

由上表可推得重要公式 $\log 10^n =$ n 。

2. 科學記號與對數之關係

(1) 科學記號：

任何有限位數的正數 x 皆可寫成科學記號。

① 若 $1 \leq a < 10$, n 為正整數，則 $x = a \times 10^n$ 的整數位數為 $n+1$ 位。例如：

$$2.18 \times 10^3 =$$

② 若 $1 \leq a < 10$, n 為正整數，則 $x = a \times 10^{-n}$ 在小數點後第 n 位開始出現不為 0 的數。($x = a \times 10^{-n}$ 小數點後連續出現 $n-1$ 個零) 例如：

$$3.170 \times 10^{-4} =$$

(2) 常用對數值與指數式的轉換：

對數表現	$\log 1 = 0$	$\log 2 \approx 0.3010$	$\log 3 \approx 0.4771$
指數式表現			

$\log 5 \approx 0.6990$	$\log 7 \approx 0.8451$	$\log 10 = 1$

由於 $10^0=1$, $10^1=10$ ，可知 $10^{0\cdots}$ （即 10 的正純小數次方）必為介在 1 與 10 之間的數字。

(3) 科學記號與 10 幕次的轉換：

① $10^{3.3010} =$

② $10^{4.48} =$

③ $5000 =$

④ $0.000002 =$

(4) 有效數字：

有效數字 (**Significant figures**) 是指在科學測量與計算中，能夠反映測量精度的可靠數字，包含「所有確定的位數」加上「第一位不確定的估計數字」。它從左邊第一個非零數字起算，到最後一位不確定數字為止。例如：2.85 和 0.00285 都是三位有效數字。而採用科學記號表示法可以明確表示有效數字位數。

(5) 常用對數性質：

(乘法)						
原始值 a	1	10	100	1000	10000	100000
對數值 $\log a$	0	1	2	3	4	5
(加法)						

① 常用對數值增加 1 $\Leftrightarrow$ 原始值增為 10 倍。

② 常用對數值減少 1 $\Leftrightarrow$ 原始值減為 $\frac{1}{10}$ 倍。

【說明】

$$\begin{cases} \log M = a \\ \log N = a + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M = 10^a \\ N = 10^{a+1} \end{cases} \Rightarrow N = 10^a \times 10 = M \times 10 = 10M$$

型一 指數與對數互換訓練**例 1**

試計算 $10^{\log 3} + 10^{2\log 5} + \log(10^7) + 6\log(\sqrt{10} \cdot \sqrt[3]{10})$ 之值。

解 $10^{\log 3} + 10^{2\log 5} + \log(10^7) + 6\log(\sqrt{10} \cdot \sqrt[3]{10})$

例 2

請由下表求出 x, y, z, u 的值：

原始值 a	30	x	3	z	0.3
常用對數值 $\log a$	1.4771	2.4771	y	3.4771	u

解 我們可以由 $\log 30 = 1.4771$ 推得：

ZZSX



原始值 a	30		3		0.3
常用對數值 $\log a$	1.4771	2.4771		3.4771	

型二 化 10 底與科學記號

例 3

已知 $\log 2 \approx 0.3010$, $\log 3 \approx 0.4771$, $\log 7 \approx 0.8451$ 。設 $\log x = 7.42$ 且 $x = a \times 10^n$ ，其中 $1 < a < 10$ ， n 為整數。試回答下列問題：

- (1) n 為_____。
- (2) a 的整數部份為_____。

解

例 4

已知 $\log 2 \approx 0.3010$, $\log 3 \approx 0.4771$, $\log 7 \approx 0.8451$, $\sqrt{3} \approx 1.732$ 。設 $A = 1000^{3\sqrt{3}}$ ，試問 A 為幾位數？

解

▣ [台南女中]

$3^{50} - 1$ 是_____位數。(已知 $10^{0.3010} \approx 2$ ， $10^{0.4771} \approx 3$)

答：24

例 5

對數 $\log 0.0000038$ 介於整數 n 和 $n+1$ 之間，求 n 之值。

解

例 6

設 a, b 為實數，若 10^a 是 10^b 的 2018 倍，則 $a-b$ 最接近哪一個整數？

- (1) 0 (2) 1 (3) 2 (4) 3 (5) 4 。

(已知 $\log 2 \approx 0.3010$, $\log 3 \approx 0.4771$, $\log 5 \approx 0.6990$, $\log 7 \approx 0.8451$)

解

REKR



例 7

已知 $\log a = 11$, $\log b = 12$, $\log c = 13$ ，回答下列問題：

(1) 試將 $a+b+c$ 用科學記號表示。

(2) $\log(a+b+c)$ 比較接近下列何值？請選出來：

(A) 11

(B) 13

(C) 25

(D) 36

(E) 40。

解

例 8

已知 $T = 3 + 4\log a$ ，試問當 T 增加 1 時， a 會變成幾倍？

解

型三**對數素養題型****例 9****地震規模與能量**

芮氏地震規模 (Richter magnitude scale) 是由美國物理學家芮克特 (Richter) 與地震學家古登堡 (Gutenberg) 於 1935 年所提出。芮氏地震規模為 r 時，所釋放的能量為 $E(r)$ 。 $E(r)$ 與 r 之間的關係式如右： $\log_{10} E(r) = 5.24 + 1.44r$ ，

已知 $10^{1.44} = 27.54$ ，試回答下列問題：

- (1) 若芮氏地震規模增加 1，釋放能量為原來的幾倍？(整數以下捨去)
- (2) 芮氏地震規模 4，請計算 $E(4)$ 。
- (3) 請計算 $\frac{E(6)}{E(4)}$ 。

解

FATY



例 10 | 氫離子濃度

我們用水溶液氫離子濃度 $[H^+]$ (莫耳/公升) 來定義該水溶液的酸鹼值 (pH 值)，其關係為 $pH = -\log[H^+]$ 。已知 $\log 2 = 0.3010$, $\log 3 = 0.4771$, $\log 8.1 = 0.9085$, $\log 8.2 = 0.9138$, $\log 8.3 = 0.9191$ ，試回答下列問題：

- (1) 已知 A 溶液的氫離子濃度為 $[H^+] = 6 \times 10^{-9}$ (莫耳/公升)，試求 A 溶液的 pH 值，並四捨五入至小數點後第一位。
- (2) 設 B 溶液的 pH 值為 4，且 C 溶液的 pH 值為 3。若將 100 毫升的 B 溶液和 400 毫升的 C 溶液混合，且混合後體積為 500 毫升，試求混合後的水溶液之 pH 值，並四捨五入至小數點後第一位。

解

例 11 | 基準值比較問題-噪音與分貝

空氣壓力變化會產生聲波，聲波會產生聲音，強音聲壓大，弱音聲壓小。衡量聲壓的單位為巴斯卡 (Pa)，定義： $\text{Pa} = \frac{N(\text{牛頓})}{m^2(\text{平方米})}$ 。人類耳朵能感應的聲響強度，單位為 μPa (微巴斯卡)，人能聽見最微弱的聲音稱「聽閾」，約 $20 \mu\text{Pa}$ ，以此作為基準。

定義：聲音分貝 = $20 \times \log\left(\frac{\text{量測聲壓}}{\text{基準聲壓}}\right)$

- (1) 請計算聽閾的聲音分貝。
- (2) 交響樂團發出最大聲響是 $2000000 \mu\text{Pa}$ ，請計算其聲音分貝。
- (3) 棒球比賽，球迷會用瓦斯氣笛加油，經過測量一支瓦斯氣笛，會發出 80 分貝的聲音，現場有 1000 支瓦斯氣笛同時發出聲音，請計算聲音為幾分貝。

解

SIHB



例 12 | 基準值比較問題-視星等

天空中星星亮度的「視星等」與對數函數有關。天文學家以織女星的亮度為標準，令織女星的亮度為 I_0 ，被觀察的星星的亮度為 I ，將其星等定義為 $m = \frac{-5}{2} \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$ 。

在星空中，人類肉眼可見最暗的星星為 6 等星，而天蠍座的心宿二為 1 等星，求：

- (1) 心宿二的亮度是 6 等星之亮度的多少倍？
- (2) 另一顆恆星 M 的亮度為心宿二的 1000 倍，求恆星 M 的星等？

解

AFUM



主題 15 指數與對數的排序

SFPR



1. 指數函數圖形

函數	$f(x) = a^x, a > 1$	$f(x) = a^x, 0 < a < 1$
圖形說例		
函數增減	遞增： $m > n \Leftrightarrow f(m) > f(n)$	遞減： $m > n \Leftrightarrow f(m) < f(n)$
增減速度	遞增速度 (由左至右) 越來越快	遞減速度 (由左至右) 越來越慢

2. 同底指數式之大小關係

(1) 底數大於 1：

若 $a > 1$ 且 x, y 皆為實數，則「 $x > y \Leftrightarrow a^x > a^y$ 」。

(2) 底數小於 1：

若 $0 < a < 1$ 且 x, y 皆為實數，則「 $x > y \Leftrightarrow a^x < a^y$ 」。

(3) 指數式排序處理方法：

類 型	說 例	處理方法
化同底數	$a = 2^{-3}, b = (\frac{1}{16})^2, c = 32^{-0.6}$	化成同底數 2
化同指數	$a = 8^{11}, b = 3^{22}$	化成同指數 11
化 10 底	$a = 2^{100}, b = 3^{30}$	化成同底數 10
圖形概念	$a = \frac{10^{3.99} + 10^{4.01}}{2}, b = 10^4$	觀察圖形凹凸性

型一**獨立數字比大小****例 1**

下列哪一個數值最小？

(1) $(\frac{1}{4})^{-3.5}$

(2) $(\frac{1}{2})^{-3}$

(3) $\sqrt[3]{128}$

(4) $8^{-\sqrt{3}}$

(5) $16^{\frac{5}{2}}$ 。

解**例 2**

比較 $a = \sqrt{3}$, $b = \sqrt[3]{4}$, $c = \sqrt[4]{5}$ 之大小。

解

VXUK



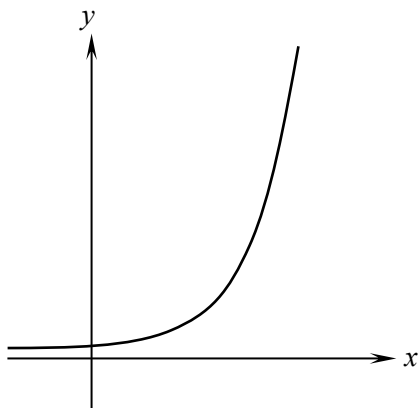
例 3

(1) 試問 $A=10^{3.99}$, $B=10^{4.01}$ 哪一個數字最接近 10000 ?

(2) 比較 $a = \frac{10^{3.99} + 10^{4.01}}{2}$, $b = 10^4$ 的大小

解

(1)



▣ [102 學測]

令 $a = 2.6^{10} - 2.6^9$, $b = 2.6^{11} - 2.6^{10}$, $c = \frac{2.6^{11} - 2.6^9}{2}$ 。請選出正確的大小關係。

(1) $a > b > c$ (2) $a > c > b$ (3) $b > a > c$ (4) $b > c > a$ (5) $c > b > a$ 。

答：(4)

YFQB



例 4

請由以下對照表比較 $|p-q|$ 與 $|q-r|$ 的大小。

原始值 a	1.6	1.7	1.8
對數值 $\log a$	p	q	r

解

NWRF



型二**指數式的極值****例 5****101 指考甲**

當 (x, y) 在直線 $2x + y = 3$ 上變動時，關於 $K = 9^x + 3^y$ 的敘述，試問下列哪個選項是正確的？

- (1) K 有最大值 28、最小值 $6\sqrt{3}$ (2) K 有最大值 28、但沒有最小值
(3) K 沒有最大值、但有最小值 12 (4) K 沒有最大值、但有最小值 $6\sqrt{3}$
(5) K 沒有最大值也沒有最小值。

解**▣ [台中一中]**

設 x, y 為實數，且 $2x + 3y = 12$ ，則當 $(x, y) =$ _____ 時， $4^x + 8^y$ 的最小值為 _____。

答：(3, 2), 128

▣ [北一女中]

設 x, y 為實數，且 $x + 3y = 6$ ，則 $10^x + 1000^y$ 的最小值為何？

答：2000

型三 指數不等式

例 6

已知 $\log 2 \approx 0.3010$, $\log 3 \approx 0.4771$, 求滿足 $3^n > 2^{100}$ 的最小正整數 n 。

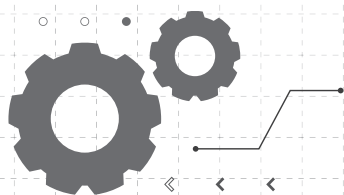
解

例 7

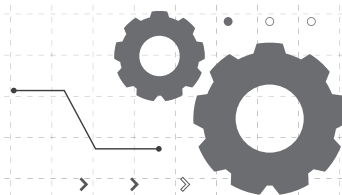
已知 47^{100} 為 168 位數，試求 47^{17} 的位數。

解

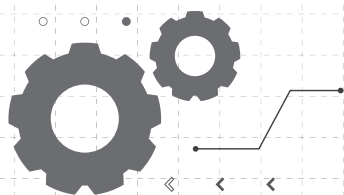
心得欄



心得欄



心得欄



數學常用符號中英對照表

英文	符號	中文	英文	符號	中文
Natural number	N	自然數	Limit	$\lim$	極限
Integer	Z	整數	Infinity	∞	無限大
Rational number	Q	有理數	Function	f	函數
Real number	R	實數	Identical with	$\equiv$	恆等
Complex number	C	複數	Highest common factor	HCF	最高公因式
Greatest common divisor	gcd	最大公因數	Least common multiple	LCM	最低公倍式
Least Common Multiple	lcm	最小公倍數	Natural Logarithm	$\ln$	自然對數
Imaginary unit	i	虛數單位	Angle	$\angle$	角
Pi	π	圓周率	Degree	$^{\circ}$	度數
Radical sign	$\sqrt{\quad}$	根號	Similar to	$\sim$	相似
Line	L	直線	Congruent to	$\cong$	全等
Slope	m	斜率	Polynomial		多項式
Perpendicular	$\perp$	垂直	Synthetic division		綜合除法
Sigma notation	Σ	求和符號	Remainder theorem		餘式定理
And so on	$\cdots$	等等	Factor theorem		因式定理
Absolute value	$ \quad $	絕對值	Exponential function	e^x	指數函數
Logarithm	$\log$	對數	Sine	$\sin$	正弦
Cosine	$\cos$	餘弦	Tangent	$\tan$	正切
Cotangent	$\cot$	餘切	Secant	$\sec$	正割
Cosecant	$\csc$	餘割	Semiperimeter	s	半周長
Period	p	週期	Centre	O	圓心
Incircle's radius	r	內切圓半徑	Circumcircle's radius	R	外切圓半徑
Triangle's area	Δ	三角形面積	Centre of gravity	G	重心
Orthocentre	H	垂心	Circumcentre	O	外心
Incentre	I	內心	Altitude	h	高度
Argument	$\arg$	幅角	Principal value of an argument	Arg	主幅角
Vector	$\rightarrow$	向量	Inner product	$\cdot$	內積
Cross product	$\times$	外積	Plane	E	平面
Circle	C	圓	Sphere	S	球面
Permutation	P	排列	Combination	C	組合

Sample space	U	樣本空間	Empty set	$\emptyset$	空集合
Union	$\cup$	聯集	Intersection	$\cap$	交集
Is contained in	$\subset$	包含於	Belongs to	$\in$	屬於
Probability	P	機率	Expectation	E	期望值
Existence	$\exists$	存在	Factorial	$!$	階乘
Arithmetic mean	$\bar{x}$	算術平均數	Geometric mean	$G.M.$	幾何平均數
Median	M_e	中位數	Mode	M_o	眾數
Range	R	全距	1 st quartile	Q_I	第一四分位數
3 rd quartile	Q_3	第三四分位數	Interquartile range	$Q.D.$	四分位差
Golden ratio	φ	黃金比	Implication	$\Rightarrow$	蘊涵

希臘文字對照表

英文	大寫	英文	小寫	發音	英文	大寫	英文	小寫	發音
A	A	a	α	<i>alpha</i>	N	N	n	ν	<i>nu</i>
B	B	b	β	<i>beta</i>	X	Ξ	x	ξ	<i>xi</i>
G	Γ	g	γ	<i>gamma</i>	O	O	o	$\omicron$	<i>omicron</i>
D	Δ	d	δ	<i>Delta</i>	P	Π	p	π	<i>pi</i>
E	E	e	ϵ	<i>Epsilon</i>	R	ρ	r	ρ	<i>rho</i>
Z	Z	z	ζ	<i>zeta</i>	S	Σ	s	σ	<i>sigma</i>
H	H	h	η	<i>eta</i>	T	T	t	τ	<i>tau</i>
Q	Θ	q	θ	<i>theta</i>	U	Υ	u	υ	<i>upsilon</i>
I	I	i	ι	<i>iota</i>	F	Φ	f	ϕ	<i>phi</i>
K	K	k	κ	<i>kappa</i>	C	χ	c	χ	<i>chi</i>
L	Λ	l	λ	<i>lambda</i>	Y	Ψ	y	ψ	<i>psi</i>
M	M	m	μ	<i>mu</i>	W	Ω	w	ω	<i>omega</i>