

主題 15 指數與對數的排序

SFPR



1. 指數函數圖形

函數	$f(x) = a^x, a > 1$	$f(x) = a^x, 0 < a < 1$
圖形說例		
函數增減	遞增： $m > n \Leftrightarrow f(m) > f(n)$	遞減： $m > n \Leftrightarrow f(m) < f(n)$
增減速度	遞增速度 (由左至右) 越來越快	遞減速度 (由左至右) 越來越慢

2. 同底指數式之大小關係

(1) 底數大於 1：

若 $a > 1$ 且 x, y 皆為實數，則「 $x > y \Leftrightarrow a^x > a^y$ 」。

(2) 底數小於 1：

若 $0 < a < 1$ 且 x, y 皆為實數，則「 $x > y \Leftrightarrow a^x < a^y$ 」。

(3) 指數式排序處理方法：

類 型	說 例	處理方法
化同底數	$a = 2^{-3}, b = (\frac{1}{16})^2, c = 32^{-0.6}$	化成同底數 2
化同指數	$a = 8^{11}, b = 3^{22}$	化成同指數 11
化 10 底	$a = 2^{100}, b = 3^{30}$	化成同底數 10
圖形概念	$a = \frac{10^{3.99} + 10^{4.01}}{2}, b = 10^4$	觀察圖形凹凸性

型一**獨立數字比大小****例 1**

下列哪一個數值最小？

- (1) $(\frac{1}{4})^{-3.5}$ (2) $(\frac{1}{2})^{-3}$ (3) $\sqrt[3]{128}$ (4) $8^{-\sqrt{3}}$ (5) $16^{\frac{5}{2}}$ 。

解**例 2**

比較 $a = \sqrt{3}$, $b = \sqrt[3]{4}$, $c = \sqrt[4]{5}$ 之大小。

解

VXUK



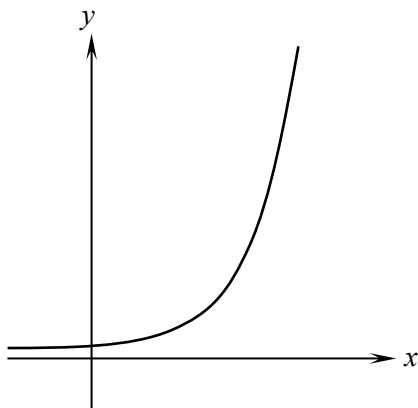
例 3

(1) 試問 $A=10^{3.99}$, $B=10^{4.01}$ 哪一個數字最接近 10000 ?

(2) 比較 $a = \frac{10^{3.99} + 10^{4.01}}{2}$, $b = 10^4$ 的大小

解

(1)



▣ [102 學測]

令 $a = 2.6^{10} - 2.6^9$, $b = 2.6^{11} - 2.6^{10}$, $c = \frac{2.6^{11} - 2.6^9}{2}$ 。請選出正確的大小關係。

(1) $a > b > c$ (2) $a > c > b$ (3) $b > a > c$ (4) $b > c > a$ (5) $c > b > a$ 。

答：(4)

YFQB



例 4

請由以下對照表比較 $|p-q|$ 與 $|q-r|$ 的大小。

原始值 a	1.6	1.7	1.8
對數值 $\log a$	p	q	r

解

NWRF



型二**指數式的極值****例 5****101 指考甲**

當 (x, y) 在直線 $2x + y = 3$ 上變動時，關於 $K = 9^x + 3^y$ 的敘述，試問下列哪個選項是正確的？

- (1) K 有最大值 28、最小值 $6\sqrt{3}$ (2) K 有最大值 28、但沒有最小值
(3) K 沒有最大值、但有最小值 12 (4) K 沒有最大值、但有最小值 $6\sqrt{3}$
(5) K 沒有最大值也沒有最小值。

解**▣ [台中一中]**

設 x, y 為實數，且 $2x + 3y = 12$ ，則當 $(x, y) =$ _____ 時， $4^x + 8^y$ 的最小值為 _____。

答：(3, 2), 128

▣ [北一女中]

設 x, y 為實數，且 $x + 3y = 6$ ，則 $10^x + 1000^y$ 的最小值為何？

答：2000

型三 指數不等式

例 6

已知 $\log 2 \approx 0.3010$, $\log 3 \approx 0.4771$, 求滿足 $3^n > 2^{100}$ 的最小正整數 n 。

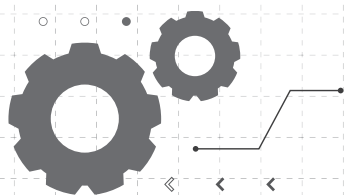
解

例 7

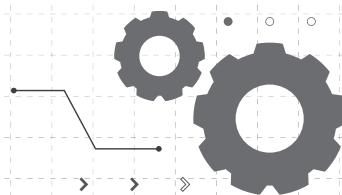
已知 47^{100} 為 168 位數，試求 47^{17} 的位數。

解

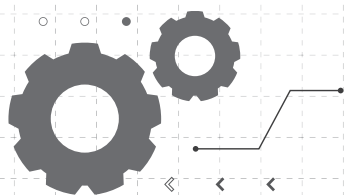
心得欄



心得欄



心得欄



數學常用符號中英對照表

英文	符號	中文	英文	符號	中文
Natural number	N	自然數	Limit	lim	極限
Integer	Z	整數	Infinity	∞	無限大
Rational number	Q	有理數	Function	f	函數
Real number	R	實數	Identical with	$\equiv$	恆等
Complex number	C	複數	Highest common factor	HCF	最高公因式
Greatest common divisor	gcd	最大公因數	Least common multiple	LCM	最低公倍式
Least Common Multiple	lcm	最小公倍數	Natural Logarithm	ln	自然對數
Imaginary unit	i	虛數單位	Angle	$\angle$	角
Pi	π	圓周率	Degree	$^{\circ}$	度數
Radical sign	$\sqrt{\quad}$	根號	Similar to	$\sim$	相似
Line	L	直線	Congruent to	$\cong$	全等
Slope	m	斜率	Polynomial		多項式
Perpendicular	$\perp$	垂直	Synthetic division		綜合除法
Sigma notation	Σ	求和符號	Remainder theorem		餘式定理
And so on	$\cdots$	等等	Factor theorem		因式定理
Absolute value	$ \quad $	絕對值	Exponential function	e^x	指數函數
Logarithm	log	對數	Sine	sin	正弦
Cosine	cos	餘弦	Tangent	tan	正切
Cotangent	cot	餘切	Secant	sec	正割
Cosecant	csc	餘割	Semiperimeter	s	半周長
Period	p	週期	Centre	O	圓心
Incircle's radius	r	內切圓半徑	Circumcircle's radius	R	外切圓半徑
Triangle's area	Δ	三角形面積	Centre of gravity	G	重心
Orthocentre	H	垂心	Circumcentre	O	外心
Incentre	I	內心	Altitude	h	高度
Argument	arg	幅角	Principal value of an argument	Arg	主幅角
Vector	$\rightarrow$	向量	Inner product	$\cdot$	內積
Cross product	$\times$	外積	Plane	E	平面
Circle	C	圓	Sphere	S	球面
Permutation	P	排列	Combination	C	組合

Sample space	U	樣本空間	Empty set	$\emptyset$	空集合
Union	$\cup$	聯集	Intersection	$\cap$	交集
Is contained in	$\subset$	包含於	Belongs to	$\in$	屬於
Probability	P	機率	Expectation	E	期望值
Existence	$\exists$	存在	Factorial	$!$	階乘
Arithmetic mean	$\bar{x}$	算術平均數	Geometric mean	$G.M.$	幾何平均數
Median	M_e	中位數	Mode	M_o	眾數
Range	R	全距	1 st quartile	Q_I	第一四分位數
3 rd quartile	Q_3	第三四分位數	Interquartile range	$Q.D.$	四分位差
Golden ratio	φ	黃金比	Implication	$\Rightarrow$	蘊涵

希臘文字對照表

英文	大寫	英文	小寫	發音	英文	大寫	英文	小寫	發音
A	A	a	α	<i>alpha</i>	N	N	n	ν	<i>nu</i>
B	B	b	β	<i>beta</i>	X	Ξ	x	ξ	<i>xi</i>
G	Γ	g	γ	<i>gamma</i>	O	O	o	$\omicron$	<i>omicron</i>
D	Δ	d	δ	<i>Delta</i>	P	Π	p	π	<i>pi</i>
E	E	e	ϵ	<i>Epsilon</i>	R	P	r	ρ	<i>rho</i>
Z	Z	z	ζ	<i>zeta</i>	S	Σ	s	σ	<i>sigma</i>
H	H	h	η	<i>eta</i>	T	T	t	τ	<i>tau</i>
Q	Θ	q	θ	<i>theta</i>	U	Y	u	υ	<i>upsilon</i>
I	I	i	ι	<i>iota</i>	F	Φ	f	ϕ	<i>phi</i>
K	K	k	κ	<i>kappa</i>	C	X	c	χ	<i>chi</i>
L	Λ	l	λ	<i>lambda</i>	Y	Ψ	y	ψ	<i>psi</i>
M	M	m	μ	<i>mu</i>	W	Ω	w	ω	<i>omega</i>