

主題 14 常用對數



1. 對數與對數律

(1) 對數符號：

設 a 為非 1 之正數，當 $b = a^x$ 時，定義 $x = \log_a b$ 。其中 $\log_a b$ 稱為

「以 a 為底數，以 b 為真數的對數」。

(2) 對數表示訓練：

① $2^x = 3 \Leftrightarrow$ [想成： x 是一個「把 2 變成 3」的次方]

② $3^x = 7 \Leftrightarrow$ [想成： x 是一個「把 3 變成 7」的次方]

③ $10^x = 5 \Leftrightarrow$ [想成： x 是一個「把 10 變成 5」的次方]

④ $2^{\log_2 3} =$ [想成：這個指數會「把 2 變成 3」]

⑤ $3^{\log_3 7} =$ [想成：這個指數會「把 3 變成 7」]

(3) 對數還原指數式訓練：

① $x = \log_2 3 \Leftrightarrow$

② $x = \log_5 7 \Leftrightarrow$

(4) 常用對數：

以 10 為底數的對數稱之，通常省略底數 10，例： $\log_{10} 2 = \log 2$ 。

(5) 10 的幕次之對數值：

$\log \frac{1}{100}$	$\log \frac{1}{10}$	$\log 1$	$\log 10$	$\log 100$	$\log 1000$

由上表可推得重要公式 $\log 10^n =$ n 。

2. 科學記號與對數之關係

(1) 科學記號：

任何有限位數的正數 x 皆可寫成科學記號。

① 若 $1 \leq a < 10$, n 為正整數，則 $x = a \times 10^n$ 的整數位數為 $n+1$ 位。例如：

$$2.18 \times 10^3 =$$

② 若 $1 \leq a < 10$, n 為正整數，則 $x = a \times 10^{-n}$ 在小數點後第 n 位開始出現不為 0 的數。($x = a \times 10^{-n}$ 小數點後連續出現 $n-1$ 個零) 例如：

$$3.170 \times 10^{-4} =$$

(2) 常用對數值與指數式的轉換：

對數表現	$\log 1 = 0$	$\log 2 \approx 0.3010$	$\log 3 \approx 0.4771$
指數式表現			

$\log 5 \approx 0.6990$	$\log 7 \approx 0.8451$	$\log 10 = 1$

由於 $10^0=1$, $10^1=10$ ，可知 $10^{0\cdots}$ （即 10 的正純小數次方）必為介在 1 與 10 之間的數字。

(3) 科學記號與 10 幕次的轉換：

① $10^{3.3010} =$

② $10^{4.48} =$

③ $5000 =$

④ $0.000002 =$

(4) 有效數字：

有效數字 (**Significant figures**) 是指在科學測量與計算中，能夠反映測量精度的可靠數字，包含「所有確定的位數」加上「第一位不確定的估計數字」。它從左邊第一個非零數字起算，到最後一位不確定數字為止。例如：2.85 和 0.00285 都是三位有效數字。而採用科學記號表示法可以明確表示有效數字位數。

(5) 常用對數性質：

(乘法)						
原始值 a	1	10	100	1000	10000	100000
對數值 $\log a$	0	1	2	3	4	5
(加法)						

① 常用對數值增加 1 $\Leftrightarrow$ 原始值增為 10 倍。

② 常用對數值減少 1 $\Leftrightarrow$ 原始值減為 $\frac{1}{10}$ 倍。

【說明】

$$\begin{cases} \log M = a \\ \log N = a + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M = 10^a \\ N = 10^{a+1} \end{cases} \Rightarrow N = 10^a \times 10 = M \times 10 = 10M$$

型一 指數與對數互換訓練

例 1

試計算 $10^{\log 3} + 10^{2\log 5} + \log(10^7) + 6\log(\sqrt{10} \cdot \sqrt[3]{10})$ 之值。

解 $10^{\log 3} + 10^{2\log 5} + \log(10^7) + 6\log(\sqrt{10} \cdot \sqrt[3]{10})$

例 2

請由下表求出 x, y, z, u 的值：

原始值 a	30	x	3	z	0.3
常用對數值 $\log a$	1.4771	2.4771	y	3.4771	u

解 我們可以由 $\log 30 = 1.4771$ 推得：

ZZSX



原始值 a	30		3		0.3
常用對數值 $\log a$	1.4771	2.4771		3.4771	

型二 化 10 底與科學記號

例 3

已知 $\log 2 \approx 0.3010$, $\log 3 \approx 0.4771$, $\log 7 \approx 0.8451$ 。設 $\log x = 7.42$ 且 $x = a \times 10^n$ ，其中 $1 < a < 10$ ， n 為整數。試回答下列問題：

- (1) n 為_____。
- (2) a 的整數部份為_____。

解

例 4

已知 $\log 2 \approx 0.3010$, $\log 3 \approx 0.4771$, $\log 7 \approx 0.8451$, $\sqrt{3} \approx 1.732$ 。設 $A = 1000^{3\sqrt{3}}$ ，試問 A 為幾位數？

解

▣ [台南女中]

$3^{50} - 1$ 是_____位數。(已知 $10^{0.3010} \approx 2$ ， $10^{0.4771} \approx 3$)

答：24

例 5

對數 $\log 0.0000038$ 介於整數 n 和 $n+1$ 之間，求 n 之值。

解

例 6

設 a, b 為實數，若 10^a 是 10^b 的 2018 倍，則 $a-b$ 最接近哪一個整數？

- (1) 0 (2) 1 (3) 2 (4) 3 (5) 4 。

(已知 $\log 2 \approx 0.3010$, $\log 3 \approx 0.4771$, $\log 5 \approx 0.6990$, $\log 7 \approx 0.8451$)

解

REKR



例 7

已知 $\log a = 11$, $\log b = 12$, $\log c = 13$ ，回答下列問題：

(1) 試將 $a+b+c$ 用科學記號表示。

(2) $\log(a+b+c)$ 比較接近下列何值？請選出來：

(A) 11

(B) 13

(C) 25

(D) 36

(E) 40。

解

例 8

已知 $T = 3 + 4\log a$ ，試問當 T 增加 1 時， a 會變成幾倍？

解

型三**對數素養題型****例 9****地震規模與能量**

芮氏地震規模 (Richter magnitude scale) 是由美國物理學家芮克特 (Richter) 與地震學家古登堡 (Gutenberg) 於 1935 年所提出。芮氏地震規模為 r 時，所釋放的能量為 $E(r)$ 。 $E(r)$ 與 r 之間的關係式如右： $\log_{10} E(r) = 5.24 + 1.44r$ ，

已知 $10^{1.44} = 27.54$ ，試回答下列問題：

- (1) 若芮氏地震規模增加 1，釋放能量為原來的幾倍？(整數以下捨去)
- (2) 芮氏地震規模 4，請計算 $E(4)$ 。
- (3) 請計算 $\frac{E(6)}{E(4)}$ 。

解

FATY



例 10 | 氫離子濃度

我們用水溶液氫離子濃度 $[H^+]$ (莫耳/公升) 來定義該水溶液的酸鹼值 (pH 值)，其關係為 $pH = -\log[H^+]$ 。已知 $\log 2 = 0.3010$, $\log 3 = 0.4771$, $\log 8.1 = 0.9085$, $\log 8.2 = 0.9138$, $\log 8.3 = 0.9191$ ，試回答下列問題：

- (1) 已知 A 溶液的氫離子濃度為 $[H^+] = 6 \times 10^{-9}$ (莫耳/公升)，試求 A 溶液的 pH 值，並四捨五入至小數點後第一位。
- (2) 設 B 溶液的 pH 值為 4，且 C 溶液的 pH 值為 3。若將 100 毫升的 B 溶液和 400 毫升的 C 溶液混合，且混合後體積為 500 毫升，試求混合後的水溶液之 pH 值，並四捨五入至小數點後第一位。

解

例 11 | 基準值比較問題-噪音與分貝

空氣壓力變化會產生聲波，聲波會產生聲音，強音聲壓大，弱音聲壓小。衡量聲壓的單位為巴斯卡 (Pa)，定義： $\text{Pa} = \frac{N(\text{牛頓})}{m^2(\text{平方米})}$ 。人類耳朵能感應的聲響強度，單位為 μPa (微巴斯卡)，人能聽見最微弱的聲音稱「聽閾」，約 $20 \mu\text{Pa}$ ，以此作為基準。

定義：聲音分貝 = $20 \times \log\left(\frac{\text{量測聲壓}}{\text{基準聲壓}}\right)$

- (1) 請計算聽閾的聲音分貝。
- (2) 交響樂團發出最大聲響是 $2000000 \mu\text{Pa}$ ，請計算其聲音分貝。
- (3) 棒球比賽，球迷會用瓦斯氣笛加油，經過測量一支瓦斯氣笛，會發出 80 分貝的聲音，現場有 1000 支瓦斯氣笛同時發出聲音，請計算聲音為幾分貝。

解

SIHB



例 12 | 基準值比較問題-視星等

天空中星星亮度的「視星等」與對數函數有關。天文學家以織女星的亮度為標準，令織女星的亮度為 I_0 ，被觀察的星星的亮度為 I ，將其星等定義為 $m = \frac{-5}{2} \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$ 。

在星空中，人類肉眼可見最暗的星星為 6 等星，而天蠍座的心宿二為 1 等星，求：

- (1) 心宿二的亮度是 6 等星之亮度的多少倍？
- (2) 另一顆恆星 M 的亮度為心宿二的 1000 倍，求恆星 M 的星等？

解

AFUM

