

主題 7 無理數

KAVY



1. 無理數

(1) 無理數的定義：

凡是實數中無法寫成 $\frac{q}{p}$ 的數則稱為無理數，其中 p, q 為整數且 $p \neq 0$ 。

(2) 無理數的類型：

無理數必可化成 。一般常見的圓周率 π 、自然常

數 e 、黃金比例 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 皆為無理數。

(3) 封閉性討論：

定義 $\oplus$ 為「加、減、乘、除」運算中的任一種運算且除法之除數不為 0。

① 有理數 $\oplus$ 有理數 = 有理數 (有理數對四則運算具封閉性)。

② 無理數 $\oplus$ 無理數 = 有理數或無理數 (無理數對四則運算不具封閉性)。

③ 有理數 $\oplus$ 無理數 = _____。

【說明】

無理數與無理數的加、減、乘、除可能為有理數：

$$\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0, \quad \sqrt{2} - \sqrt{2} = 0, \quad \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3, \quad \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1.$$

2. 無理數相關定理

(1) 定理一：

設 a, b 為有理數且 X 為無理數。若 $a = bX$ ，則 $a = b = 0$ 。

(2) 定理二：

已知 a, b, c, d 為有理數且 X 為無理數，若 $a + bX = c + dX$ ，則 $a = c, b = d$ 。

【說明】

$$a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2} \Rightarrow a - c = (d - b)\sqrt{2}$$

$$\text{由定理一可知 } a - c = d - b = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$$

【說例】

若 $a, b \in \mathbb{Q}$ 且 $a + b\sqrt{2} = 7 - 5\sqrt{2}$ ，則 $a = 7, b = -5$ 。

(3) 重要觀念：

- ① 已知 a, c 為有理數且 X, Y 為無理數，若 $a + X = c + Y$ ，則不一定 $a = c, X = Y$ 。
- ② 若 p 為質數，則 $\sqrt{p}$ 為無理數。
- ③ 若 a, b 皆為無理數，則 $a + b$ 與 $a - b$ 至少有一個無理數。
- ④ 若 $a + b$ 與 $a - b$ 皆為無理數，則 a, b 至少有一個無理數。

【說明 1】

在無理數舉例時，不要侷限於二次根式，可以試試 $\sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{5}, \dots$ 等等；也不必侷限於單一項的無理數，可以試試 $1 + \sqrt{2}, \sqrt{2} + \sqrt{3}, \dots$ 等等。

【說明 2】

例 1

已知 a, b 皆為實數，試問下列敘述何者正確？請選出來：

- (1) 一個有理數與一個無理數之積必為無理數
- (2) 若 $a+b$ 為有理數且 ab 為無理數，則 $a-b$ 為無理數
- (3) 存在兩個無理數 a, b 使得 $\frac{a}{b}$ 為無理數且 ab 為有理數。
- (4) 若 a^2 與 a^6 都是有理數，則 a 是有理數
- (5) 若 a^5 與 a^7 都是有理數，則 a 是有理數。

解

例 2

已知 $x^2 + px + q = 0$, $p, q \in \mathbb{Q}$, 若 $1 + \sqrt{2}$ 為其一根, 求 p, q 及另一根。

解 1° $\because 1 + \sqrt{2}$ 為有理係數方程式 $x^2 + px + q = 0$ 的一根

$$\therefore (1 + \sqrt{2})^2 + p(1 + \sqrt{2}) + q = 0 \Rightarrow (p + q + 3) + (p + 2)\sqrt{2} = 0$$



例 3

若 $x, y \in \mathbb{Q}$ 且 $x\sqrt{3-2\sqrt{2}} + y\sqrt{17-12\sqrt{2}} = \sqrt{43-30\sqrt{2}}$ ，求 x 與 y 。

解

LGAM



例 4

設正實數 a 的小數部分是 b ，若已知 $a^2 + b^2 = 38$ ，求 a 與 b 之值。

解

DQHR



例 5

證明 $\sqrt{2}$ 是無理數。

證

例 6

已知 p, q 皆為無理數，試證明 $p+q, p-q$ 至少有一個無理數。

證 1° 令 $p+q, p-q$ 皆為有理數 [Step1 先否定結論]

2° 但 $p = \frac{(p+q)+(p-q)}{2}$ 為有理數 $\left(\frac{\text{有理數} + \text{有理數}}{\text{有理數}} = \text{有理數} \right)$

$$q = \frac{(p+q)-(p-q)}{2} \text{ 為有理數}$$

但題給「 p, q 皆為無理數」產生矛盾 [Step2 找到矛盾]

3° 由 1° 2° 可知假設錯誤，故 $p+q, p-q$ 至少有一個無理數。 [Step3 再扶正結論]

例 7

已知 $\sqrt{2}$ 是無理數，試證明 $\sqrt{2+\sqrt{2}}$ 是無理數。

證 1° 令 $x = \sqrt{2+\sqrt{2}}$ 且假設 x 為有理數 [Step1 先否定結論]

$$2^\circ \quad x^2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}^2 \Rightarrow x^2 = 2+\sqrt{2} \Rightarrow x^2 - 2 = \sqrt{2}$$

因為 x 為有理數且由有理數四則運算的封閉性可知 $x^2 - 2$ 亦為有理數，

但題給 $\sqrt{2}$ 是無理數，故 $x^2 - 2 = \sqrt{2}$ 矛盾 [Step2 找到矛盾]

3° 由 1° 2° 可知假設錯誤，故 $\sqrt{2+\sqrt{2}}$ 是無理數。 [Step3 再扶正結論]

主題 8 實數

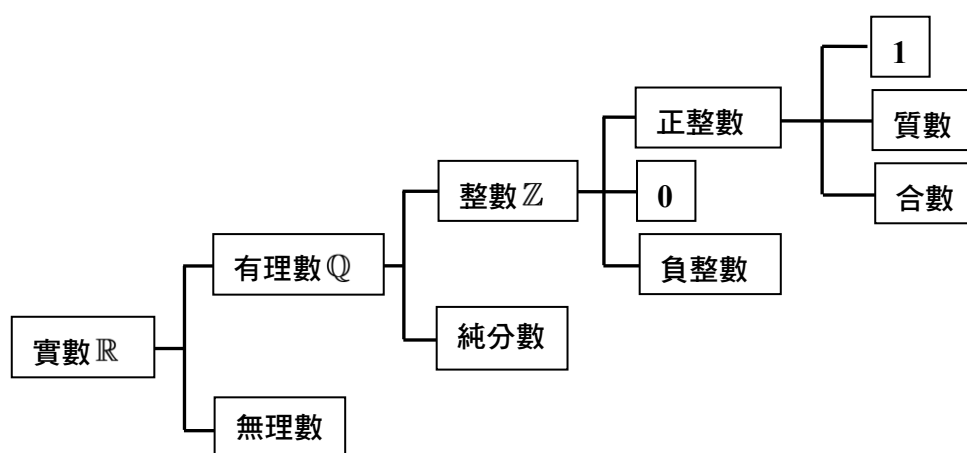
KBQS



1. 實數

(1) 實數結構：

實數僅包含有理數與無理數兩部份，其餘結構如下：



(2) 實數的四則運算具封閉性：

實數經加、減、乘、除四則運算之後其結果仍為實數 (除法之除數不可為 0)。

(3) 實數具有稠密性：

① 若 $a, b \in \mathbb{R}$ 且 $a < b$ ，則兩相異實數 a, b 間必存在另一實數 x ，使得 $a < x < b$

(取 $x = \frac{a+b}{2}$ 即可)。此性質稱為實數稠密性。

② 有理數系與無理數系同樣具有稠密性。

③ 兩相異有理數間必存在一個無理數。【高中範圍不討論其證明】

④ 兩相異無理數間必存在一個有理數。【高中範圍不討論其證明】

⑤ 無理數與有理數都是無限多個，而無理數的數量大於有理數的數量。

2. 實數的性質

(1) 實數的運算性質：

若 a, b, c 皆為實數，則 a, b, c 滿足以下性質：

- ① 加法交換律： $a+b=b+a$
- ② 乘法交換律： $ab=ba$
- ③ 加法結合律： $(a+b)+c=a+(b+c)$
- ④ 乘法結合律： $(ab)c=a(bc)$
- ⑤ 左分配律： $a(b+c)=ab+ac$
- ⑥ 右分配律： $(b+c)a=ba+ca$
- ⑦ 加法消去律： $a+c=b+c \Rightarrow a=b$
- ⑧ 乘法消去律： $ab=ac (a \neq 0) \Rightarrow b=c$

(2) 實數的次序性質：

若 a, b, c 皆為實數，則 a, b, c 滿足以下性質：

- ① 三一律： $a > b, a = b, a < b$ 三者中必有一個且僅有一個成立。
- ② 遞移律：若 $a > b, b > c$ ，則 $a > c$ 。
- ③ 加法次序性：若 $a > b$ ，則 $a+c > b+c$ 。
- ④ 乘法次序性：若 $a > b$ 且 $c > 0$ ，則 $ac > bc$ ；若 $a > b$ 且 $c < 0$ ，則 $ac < bc$ 。
- ⑤ 平方次序性：若 $a > b > 0$ ，則 $a^2 > b^2$ ；若 $a < b < 0$ ，則 $a^2 > b^2$ 。

(3) 實數運算經驗法則：

- ① 若 $a \in \mathbb{R}$ ，則 $a^2 \geq 0$ 。
- ② 若 $a, b \in \mathbb{R}$ ，且 $a^2 + b^2 = 0$ ，則 $a = b = 0$ 。
- ③ 若 $a, b \in \mathbb{R}$ ，且 $a^2 + b^2 \leq 0$ ，則 $a = b = 0$ 。
- ④ 若 $a, b, c \in \mathbb{R}$ ，且 $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$ ，則 $a = b = c$ 。
- ⑤ 若 $a, b, c \in \mathbb{R}$ ，且 $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \leq 0$ ，則 $a = b = c$ 。

(4) 真假分數結構法則：

① 假分數法則：設 a, b, x, y 為正實數且 $a > b, x > y$ ，則 $\frac{a}{b} > \frac{a+y}{b+y} > \frac{a+x}{b+x}$ 。

【說明】

$$\frac{2}{1} > \frac{3}{2} > \frac{4}{3} > \frac{5}{4}$$

② 真分數法則：設 a, b, x, y 為正實數且 $a > b, x > y$ ，則 $\frac{b}{a} < \frac{b+y}{a+y} < \frac{b+x}{a+x}$ 。

【說明】

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{4}{5}$$

(5) 運算封閉性的討論：

以下為各數系對於四則運算是否具封閉性的註記。

	加	減	乘	除 (分母不為 0)
正整數	✓		✓	
整數	✓	✓	✓	
有理數	✓	✓	✓	✓
無理數				
實數	✓	✓	✓	✓

例 1

設 x, y, z 皆為實數且 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2x - 8y + 6z + 12 = 0$ ，求 x, y, z 。

解

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2x - 8y + 6z + 12 = 0$$

WXZL



例 2

若 $a \geq -1, b \geq 2, c \geq -1$ 且 $a + b + c + 3 = 2(\sqrt{a+1} + \sqrt{b-2} + \sqrt{c+1})$ ，求 $a^2 + b^2 + c^2$ 之值。

解

▣ [衛道中學]

設 x, y 均為實數，且 $x^2 + 4xy + 6y^2 - 6x - 16y + 11 = 0$ ，則數對 $(x, y) =$ _____。

答：(1, 1)

Topic 1-2

絕對值與數線

主題 9 數線

YWFD



1. 數線

(1) 實數線的意義：

全部實數(有理數和無理數)和數線上的點形成一對一的對應；有理數對應的點，稱為**有理點**；無理數對應的點，稱為**無理點**。

(2) 實數線上的距離：

$A(x_1)$, $B(x_2)$ 在數線上兩點間距離記為 $d(A, B) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(3) 有理點的作法：

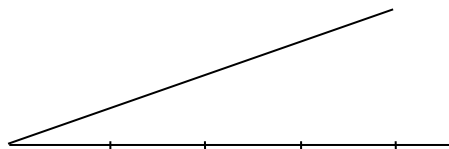
只要是有理數 $\frac{q}{p}$ 形態 (p, q 為整數) 皆可在數線上以尺規作圖求得，以 $\frac{4}{3}$ 為例：

Step 1 過 $x=0$ 作一條不與實數線重合的直線 L 。(令 $x=0$ 的位置為 P_0)

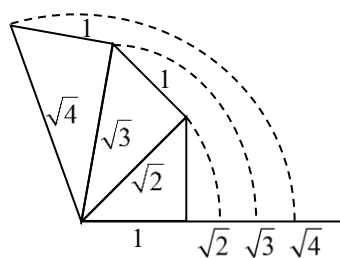
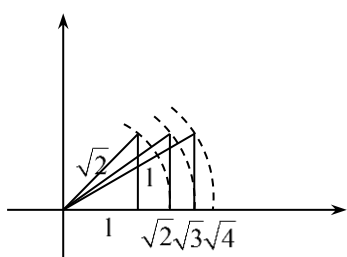
Step 2 在 L 上從 $x=0$ 開始與 x 軸正向同向取適當長三等分，分別得到 P_1 、 P_2 、 P_3 。

Step 3 連接 P_3 與 $x=4$ 並令此直線為 L_1 。

Step 4 過 P_1 作平行 L_1 的直線 L_2 ， L_2 與 x 軸的交點即為有理點 $x = \frac{4}{3}$ 。

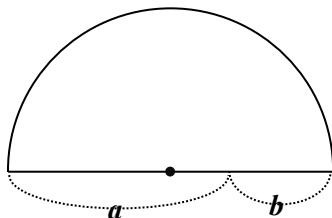


(4) 特殊無理點的作法：



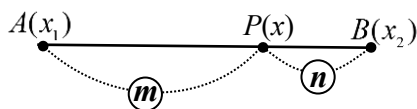
【說明】

若給定長度 a ，長度 b ，則長度 $\sqrt{ab}$ 可以尺規作圖作出：



2. 分點公式

(1) 內分點公式：



一維數線上有兩點 $A(x_1)$ 及 $B(x_2)$ ，且 $P(x)$ 在線段 $\overline{AB}$ 上， $\overline{AP}:\overline{PB}=m:n$ ，

即 P 為 $\overline{AB}$ 的內分點，則

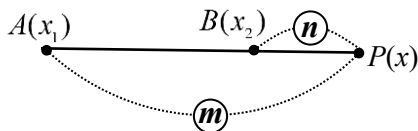
$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m + n}。$$

【說明】

$$\because \frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} = \frac{m}{n} \Rightarrow \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{m}{n}$$

$$\therefore nx - nx_1 = mx_2 - mx \Rightarrow x(m + n) = mx_2 + nx_1 \Rightarrow x = \frac{mx_2 + nx_1}{m + n}$$

(2) 外分點公式：



一維數線上有兩點 $A(x_1)$ 及 $B(x_2)$ 且 $P(x)$ 在線段 $\overline{AB}$ 外， $\overline{AP}:\overline{PB}=m:n$ ($m > n$)

，即 P 為 $\overline{AB}$ 的外分點，則

$$x = \frac{mx_2 - nx_1}{m - n}。$$

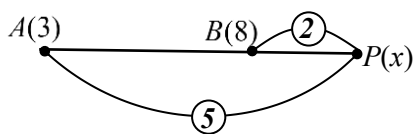
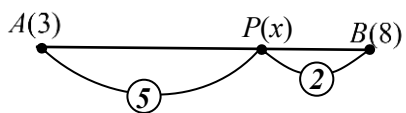
【說明】

$$\therefore \frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} = \frac{m}{n} \Rightarrow \frac{x - x_1}{x - x_2} = \frac{m}{n}$$

$$\therefore nx - nx_1 = mx - mx_2 \Rightarrow x(m - n) = mx_2 - nx_1 \Rightarrow x = \frac{mx_2 - nx_1}{m - n}$$

【說例】

已知 $A(3)$, $B(8)$, P 皆在實數線上，若 $\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} = \frac{5}{2}$ ，求 P 坐標。



例 1

已知單位長 1 時，下列何者可用尺規作圖求得長度？請選出來。

- (1) $\sqrt{2+\sqrt{2}}$ (2) $\frac{\sqrt{3+\sqrt{2}}}{\sqrt{7}+1}$ (3) $\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt{7}+1}$ (4) $\sqrt[5]{125}$ (5) $\sqrt{0.5}$ 。

解 凡正有理數 a, b 的加 $a+b$ 、減 $a-b$ 、乘 ab 、除 $\frac{a}{b}$ 及 $\sqrt{ab}$ 及上述任兩數之加、減、乘、除、及幾何平均數皆可尺規作圖得之。

例 2

已知 $x < y$ ，則以下哪些數字必定介於 x, y 之間？請選出來。

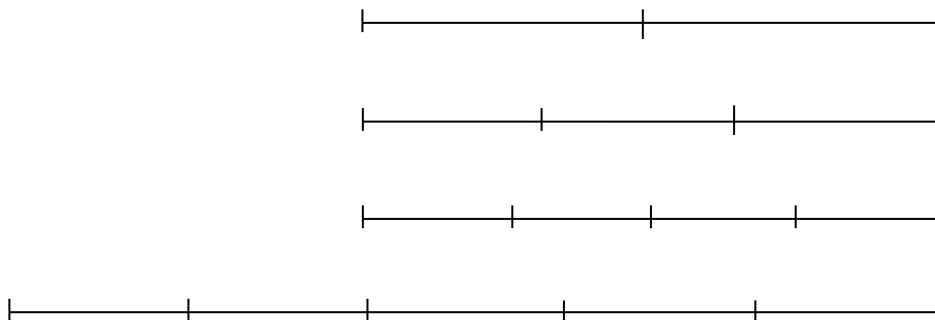
- (1) $\frac{x+y}{2}$ (2) $\frac{\sqrt{2}x+y}{\sqrt{2}+1}$ (3) $\frac{x+3y}{4}$ (4) $\frac{5x-2y}{3}$ (5) $\frac{x+3y}{3}$ 。

解

例 3

試比較 $x = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{6}}{2}$, $y = \frac{\sqrt{5} + 2\sqrt{6}}{3}$, $z = \frac{3\sqrt{5} + \sqrt{6}}{4}$, $u = \frac{5\sqrt{5} - 2\sqrt{6}}{3}$ 的大小關係。

解



主題 10 算幾不等式

BAHX



1. 平均數

(1) 算術平均數：

n 個實數 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 的算術平均數被定義為

$$A = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n}。$$

(2) 幾何平均數：

n 個正數 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 的幾何平均數被定義為

$$G = \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \dots a_n}。$$

2. 二元算幾不等式

(1) 二變數算幾不等式：

若 $a \geq 0, b \geq 0$ ，此時 $A = \frac{a+b}{2}$ ， $G = \sqrt{ab}$ ，則不等式 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 恆成立。

且只有在 $a=b$ 時，不等式的等號才會成立。

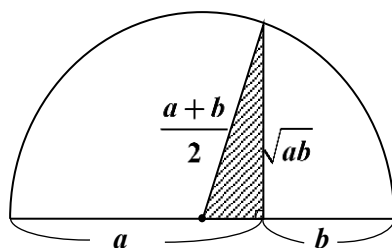
【證明 1】

$$\therefore \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0$$

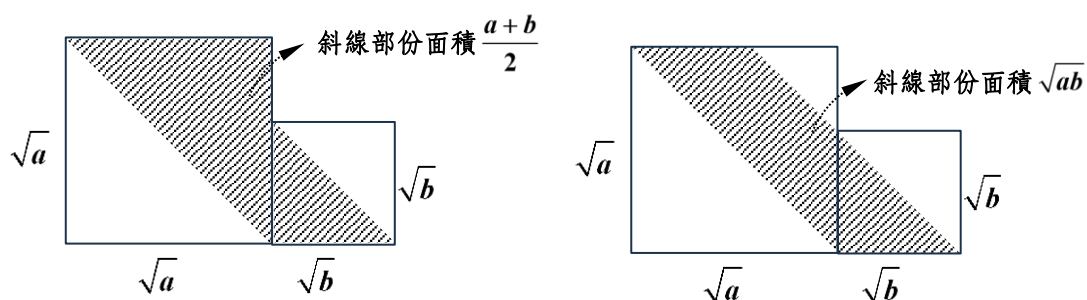
$$\therefore \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

$$\text{又 } \frac{a+b}{2} = \sqrt{ab} \text{ 時，即 } \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} = 0 \text{ 時，此時 } a=b$$

【證明 2】 *proof without words*



【證明 3】 *proof without words*



(2) 使用時機：

① 相加、相乘同時出現，欲求極值。

已知 $x + 2y = 4$ ，求 xy 的最大值。	[2]
已知 $a > 0, b > 0$ ， $a^2 + 4b^2 = 8$ ，求 ab 的最大值。	[2]
已知 $x > 0, y > 0$ 且 $xy = 100$ ，求 $\frac{1}{x} + \frac{16}{y}$ 之最小值。	$[\frac{4}{5}]$
已知 $x \geq 2, y \geq -1$ ， $(x-2)(y+1) = 54$ ，求 $3x + 2y$ 的最小值。	[40]

② 倒數相加求極值。

求 $x^2 + \frac{9}{x^2}$ 的最小值。	[6]
已知 $x > 2$ ，求 $x + \frac{4}{x-2}$ 的最小值。	[6]

3. n 元算幾不等式 [自行參考]

(1) n 變數算幾不等式：

設 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 為 n 個正數或 0，以下不等式恆成立：

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}。$$

且只有在 $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ 時，不等式的等號才會成立。

(2) 四變數算幾不等式：

假設 $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0, d \geq 0$ ，則不等式 $\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$ 恆成立。

且只有在 $a=b=c=d$ 時，不等式的等號才會成立。

【證明】

$$\frac{a+b+c+d}{4} = \frac{\frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2}}{2} \geq \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{c+d}{2}\right)} \geq \sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}} = \sqrt[4]{abcd}$$

(3) 三變數算幾不等式：

假設 $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ ，則不等式 $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ 恆成立。

且只有在 $a=b=c$ 時，不等式的等號才會成立。

【證明】

將 $d = \frac{a+b+c}{3}$ 代入 $\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$ 可得

$$\begin{aligned} \frac{a+b+c + \frac{a+b+c}{3}}{4} &\geq \sqrt[4]{abc\left(\frac{a+b+c}{3}\right)} \Rightarrow \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[4]{abc\left(\frac{a+b+c}{3}\right)} \\ \Rightarrow \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^4 &\geq abc\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \Rightarrow \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \geq abc \Rightarrow \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \end{aligned}$$

型一**基本型算幾不等式****例 1**

已知 $x > 0$, $y > 0$, $xy = 6$, 求 $2x + 3y$ 的最小值, 並求有最小值時之數對 (x, y) 。

解

CETU

**例 2**

已知 $a > 0$, $b > 0$, $a^2 + 4b^2 = 8$, 求 ab 的最大值。

解

例 3

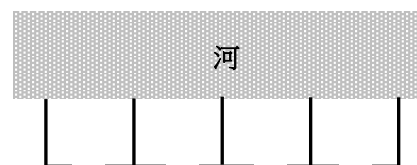
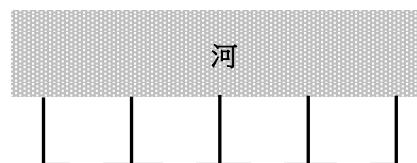
已知 $x > 0$, $y > 0$ 且 $xy = 100$ ，求 $\frac{1}{x} + \frac{16}{y}$ 之最小值。

解

例 4

如右圖，在河邊欲用圍籬圍出四間全等的矩形菜圃，且靠河的一邊不須圍籬，又圍籬共長 112 公尺。且每間菜圃都有一個 2 公尺的入口。則此四間菜圃的最大面積和為_____平方公尺。

解



型二**倒數型算幾不等式****例 5**

- (1) 已知 $x > 0$ ，證明 $x + \frac{4}{x} \geq 4$ 。
- (2) 已知 $x > -1$ ，求 $f(x) = x + \frac{9}{x+1}$ 的最小值。

解**▣ [挑戰題]**

已知 $t > 1$ ，則 $\frac{t^4}{t^2-1}$ 的最小值為_____。

答：4

例 6 | 等號成立的重要性

設 x 為任意實數，且函數 $f(x) = x^2 + 4 + \frac{1}{x^2 + 4}$ ，試回答下列問題：

- (1) 敘述「 $f(x) \geq 2$ 」是否正確？
- (2) 函數 $f(x)$ 的最小值是否為 2？試寫出原因。

解

型三 進階型算幾不等式

例 7

已知 $x \geq 2$, $y \geq -1$, $(x-2)(y+1) = \frac{27}{2}$, 求 $3x+2y$ 的最小值。

解

▣ [台中女中]

已知 a, b 為正實數，且 $2a+b=16$ ，求 $(a+1)(b+2)$ 的最大值為_____。

答：50

▣ [北一女中]

已知 $x > 3$, $y > 0$, $2x+xy-3y=60$ ，求 $2x+3y$ 的最小值。

答：36

例 8

已知 $x > 0, y > 0$ ，求 $(3x - \frac{2}{y})(2y - \frac{3}{x})$ 的最小值。

解

▣ [衛道中學]

設 $x > 0, y > 0, z > 0$ ，則 $\frac{2y-x}{x} + \frac{4(x-2y+z)}{y} - \frac{8(z-y)}{z} + 17$ 的最小值為_____。

答： $12\sqrt{2}$

主題 11 實數區間

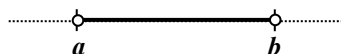
KTMS



1. 實數區間表示法

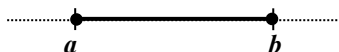
(1) 開區間：

符號 (a, b) 可以表示滿足 $a < x < b$ 的所有實數 x 形成的群體集合。



(2) 閉區間：

符號 $[a, b]$ 可以表示滿足 $a \leq x \leq b$ 的所有實數 x 形成的群體集合。

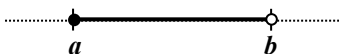


(3) 半開區間：

① 符號 $(a, b]$ 可以表示滿足 $a < x \leq b$ 的所有實數 x 形成的群體集合。

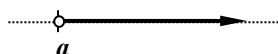


② 符號 $[a, b)$ 可以表示滿足 $a \leq x < b$ 的所有實數 x 形成的群體集合。



(4) 無限區間：

① 符號 (a, ∞) 可以表示大於 a 的所有實數所成的群體集合。



② 符號 $[a, \infty)$ 可以表示大於等於 a 的所有實數所成的群體集合。



③ 符號 $(-\infty, b)$ 可以表示小於 b 的所有實數所成的群體集合。



④ 符號 $(-\infty, b]$ 可以表示小於等於 b 的所有實數所成的群體集合。



⑤ 符號 $(-\infty, \infty)$ 表示所有實數所成的集合，或可以直接使用集合符號 $\mathbb{R}$ 。

【說例 1】

滿足 $2 < x \leq 3$ 的所有實數 x 形成的集合可以表示為_____。

【說例 2】

滿足 $x > 3$ 的所有實數 x 形成的集合可以表示為_____。

2. 實數區間的相關邏輯符號

(1) 屬於符號：

實數 x 若在區間 A 的範圍內，可以表示為 $x \in A$ 。例如 $\sqrt{2} \in (1, 5)$ 。

(2) 聯集符號：

若解答的集合為兩個以上的不連續區間，可以用聯集符號 $\cup$ 表示。

【說例】

滿足 $2 < x < 3$ 或 $4 < x < 8$ 的所有實數 x 形成的集合可以表示為_____。

例 1

已知 $2 \leq x \leq 5$, $-1 \leq y \leq 3$, 試回答下列問題：

- (1) 求 $3x - 2y$ 的範圍。 (2) 求 $x^2 + y^2$ 的範圍。
(3) 求 xy 的範圍。 (4) 求 $\frac{y}{x}$ 的範圍。

解 (1) 【法一】

$$\begin{cases} 2 \leq x \leq 5 \\ -1 \leq y \leq 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6 \leq 3x \leq 15 \\ -6 \leq -2y \leq 2 \end{cases} \Rightarrow$$

DX.YR



【法二】

比較建議使用法一，但如果你想要使用減法產生範圍，則要注意

「前項的最大值 減去 後項的最小值」才能得到最大範圍上限，同理，

「前項的最小值 減去 後項的最大值」才能得到最大範圍下限。

$$\begin{cases} 2 \leq x \leq 5 \\ -1 \leq y \leq 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6 \leq 3x \leq 15 \\ -2 \leq 2y \leq 6 \end{cases} \Rightarrow 6 - 6 \leq 3x - 2y \leq 15 - (-2)$$

$$(2) \begin{cases} 2 \leq x \leq 5 \\ -1 \leq y \leq 3 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$(3) \begin{cases} 2 \leq x \leq 5 \\ -1 \leq y \leq 3 \end{cases} \quad x \text{ 與 } y \text{ 乘積之最大值或最小值可為 } -2, 6, -5, 15$$

例 2

已知 $2 \leq x \leq 5$, $-1 \leq y \leq 3$, 試求 $xy + x - y + 1$ 的範圍並用區間集合符號表達。

解

2025^年 陳立教育

[單 一 年 度]

唯有陳立絕不混榜亂真 ★ 只有最好才能成就更好

姓名	就讀高中	錄取校系	姓名	就讀高中	錄取校系	姓名	就讀高中	錄取校系
劉○昀	港明中學	陽交大 工業工程與管理	林○悅	松山高中	成大 資訊工程學系	李○澤	家齊高中	成大 水利及海洋工程
林○泓	松山高中	陽交大 醫學生物技術暨檢驗	賴○泰	成功高中	成大 資源工程學系	張○凱	松山高中	成大 地球科學系
羅○宸	師大附中	陽交大 醫學生物技術暨檢驗	陳○瑀	南山中學	成大 資源工程學系	孫○絜	台中女中	成大 地球科學系
陳○昕	興大附中	陽交大 醫學生物技術暨檢驗	張○蓉	六和高中	成大 資源工程學系	謝○庭	台南一中	成大 地球科學系
盧○安	華江高中	陽交大 生物科技學系	許○洋	港明中學	成大 資源工程學系	蘇○熙	師大附中	成大 化學系
楊○叡	西松高中	陽交大 生物科技學系	李○軒	成功高中	成大 化學工程學系	黃○巧	中山女中	成大 化學系
莫○翔	西松高中	陽交大 生物醫學工程	王○程	成功高中	成大 化學工程學系	林○宇	南科國中	成大 化學系
林○旭	建國中學	陽交大 生物醫學工程	黃○皓	明道中學	成大 化學工程學系	黃○元	後甲國中	成大 化學系
胡○瑜	復興國中	陽交大 生物醫學工程	楊○惠	中壢高中	成大 化學工程學系	孫○涵	北大高中	成大 化學系
余○茵	北大高中	陽交大 生物醫學影像暨放射	曾○軒	武陵高中	成大 化學工程學系	彭○淇	內壢高中	成大 化學系
黃○洋	師大附中	陽交大 理學院	李○鉉	台南一中	成大 化學工程學系	黃○宸	台南女中	成大 化學系
郭○愷	成功高中	陽交大 理學院	廖○豪	忠孝國中	成大 化學工程學系	林○彤	大直高中	成大 材料科學及工程
王○婕	後甲國中	陽交大 管理科學系	黃○宏	忠孝國中	成大 化學工程學系	李○捷	復旦高中	成大 材料科學及工程
楊○幼	台南女中	陽交大 管理科學系	陳○羽	北一女中	成大 機械工程學系	劉○含	中山女中	成大 系統及船舶機電工程
劉○鴻	恆毅中學	陽交大 應用數學系	李○宏	中和高中	成大 機械工程學系	鄭○堯	板橋高中	成大 航空太空工程學系
林○任	台南二中	陽交大 應用數學系	陳○雅	北一女中	成大 機械工程學系	呂○祐	武陵高中	成大 航空太空工程學系
林○萱	華僑高中	陽交大 傳播與科技學系	歐○安	衛道中學	成大 機械工程學系	陳○宇	台南一中	成大 航空太空工程學系
施○喆	內壢高中	陽交大 傳播與科技學系	李○晴	武陵高中	成大 機械工程學系	陳○鈞	薇閣高中	成大 物理學系
易○榆	東莞台校	陽交大 傳播與科技學系	吳○晨	北一女中	成大 光電科學與工程學系	蔡○佑	和平高中	成大 物理學系
吳○諾	曉明女中	陽交大 人文社會學系	田○瑋	新民高中	成大 光電科學與工程學系	周○力	中和高中	成大 物理學系
劉○賢	建國中學	陽交大 藥學系	陳○嫣	中山女中	成大 土木工程學系	曾○瑩	中山女高	成大 物理治療學系
何○晴	北一女中	陽交大 藥學系	林○承	南山中學	成大 土木工程學系	施○均	後甲國中	成大 物理治療學系
邱○惟	板橋高中	陽交大 藥學系	簡○紋	興大附中	成大 土木工程學系	郭○岑	台南女中	成大 測量及空間資訊
曾○駿	建國中學	陽交大 藥學系	張○熙	台南一中	成大 土木工程學系	陳○文	市立大同	成大 法律學系
顏○甦	台南女中	陽交大 護理學系	林○軒	台中二中	成大 環境工程學系	林○恆	師大附中	成大 數學系
邢○亞	中山女中	陽交大 護理學系	歐○騫	建興國中	成大 工程科學系	廖○捷	台中一中	成大 數學系
周○緯	北一女中	成大 牙醫學系	邱○庭	德光中學	成大 工業與資訊管理學系	陳○安	中山女中	成大 都市計劃學系
黃○甯	台南女中	成大 電機工程學系	陳○羽	德光中學	成大 工業與資訊管理學系	蕭○東	師大附中	成大 會計學系
沈○翔	永康國中	成大 電機工程學系	黃○霖	東山中學	成大 水利及海洋工程學系	李○喬	台南女中	成大 會計學系
林○程	松山高中	成大 電機工程學系	許○維	興大附中	成大 水利及海洋工程學系	張○元	安南國中	成大 經濟學系
周○廷	師大附中	成大 資訊工程學系	許○瑜	文華高中	成大 水利及海洋工程學系	鄭○恩	成功高中	成大 企業管理學系

陳立既出 誰與爭鋒 ★ 各類榜首 盡在陳立

頂尖大學風雲榜

臺大、清大、陽交大、成大、政大 ★ Part 2

姓名	就讀高中	錄取校系	姓名	就讀高中	錄取校系	姓名	就讀高中	錄取校系
歐○霖	板橋高中	成大 企業管理學系	黃○睿	建國中學	政大 會計學系	劉○寧	北一女中	政大 傳播學院
郭○恩	武陵高中	成大 成星招生丁組	張○瑜	板橋高中	政大 會計學系	陳○安	中山女中	政大 傳播學院
張○睿	師大附中	成大 生物醫學工程學系	江○安	北一女中	政大 會計學系	許○瑄	中崙高中	政大 傳播學院
王 ○	武陵高中	成大 職能治療學系	郭○銘	文華高中	政大 會計學系	昌○寧	中山女高	政大 傳播學院
沈○霓	中山女高	成大 醫學檢驗生物技術	高○磐	海山高中	政大 經濟學系	林○亨	新民高中	政大 傳播學院
鄭○晴	台南二中	成大 護理學系	楊○惟	市立大同	政大 經濟學系	劉○安	華盛頓中學	政大 傳播學院
謝○鵠	慈濟國中	成大 護理學系	王○嫻	北一女中	政大 經濟學系	李○綾	中壢高中	政大 傳播學院
紀○甫	板橋高中	成大 歷史學系	孫○瑞	中和高中	政大 經濟學系	黃○勳	復興國中	政大 傳播學院
黃○涓	平鎮高中	成大 歷史學系	王○潔	板橋高中	政大 經濟學系	陳○璋	建國中學	政大 應用數學系
許○晴	台中女中	成大 心理學系	郭○恩	延平中學	政大 經濟學系	侯○恩	華江高中	政大 應用數學系
李○芸	恆毅中學	成大 中文系	施○澤	薇閣高中	政大 經濟學系	曾○諒	復旦高中	政大 應用數學系
童○尊	華江高中	成大 台灣文學系	沈○儀	平鎮高中	政大 統計學系	陳○安	建興國中	政大 應用數學系
許○涵	明倫高中	成大 外國語文學系	蔡○祥	建國中學	政大 資訊科學系	黃○庭	北一女中	政大 公共行政學系
黃○華	中正高中	成大 外國語文學系	連○丞	大直高中	政大 資訊科學系	李○慧	和平高中	政大 教育學系
郭○汝	板橋高中	成大 外國語文學系	魏○浩	長榮中學	政大 資訊科學系	劉○臻	板橋高中	政大 外交學系
張○瑀	台中女中	成大 外國語文學系	陳○廣	板橋高中	政大 風險管理與保險	賴○安	板橋高中	政大 外交學系
俞○軒	建國中學	政大 法律學系	陳○澤	中和高中	政大 風險管理與保險	陳○宣	台南女中	政大 外交學系
林○婷	薇閣高中	政大 法律學系	林○紘	市立大同	政大 企業管理學系	羅○均	新竹女中	政大 心理學系
陳○灝	建國中學	政大 法律學系	彭○鴻	海山高中	政大 企業管理學系	王○桓	成功高中	政大 心理學系
孫○霖	成功高中	政大 法律學系	陳○榛	北一女中	政大 企業管理學系	陳○靜	中山女中	政大 中國文學系
劉○誠	台中一中	政大 法律學系	劉○嘉	中壢高中	政大 企業管理學系	吳○霆	師大附中	政大 英國語文學系
陳○妘	新莊高中	政大 社會學系	楊○安	曉明女中	政大 企業管理學系	林○潔	北一女中	政大 英國語文學系
吳○恩	台南一中	政大 金融學系	林○欣	北一女中	政大 資訊管理學系	鄭○筠	景美女中	政大 日本語文學系
許○菱	中山女中	政大 金融學系	徐○雙	中山女中	政大 資訊管理學系	許 ○	彭藝高中	政大 日本語文學系
黃○綺	台中女中	政大 金融學系	黃○妍	板橋高中	政大 資訊管理學系	黃○容	中和高中	政大 韓國語文學系
黃○紘	松山高中	政大 財政學系	王○悠	成淵高中	政大 地政學系	余○媛	板橋高中	政大 土耳其語文學系
張○暄	中和高中	政大 財政學系	林○宇	松山高中	政大 地政學系	陳○婷	北一女中	政大 阿拉伯語文學系
林○捷	政大附中	政大 財務管理學系	紀○芸	薇閣高中	政大 地政學系	林○如	永春高中	政大 阿拉伯語文學系
廖○綸	北一女中	政大 國際經營與貿易	謝○柔	台中女中	政大 地政學系	林○彤	永春高中	政大 阿拉伯語文學系
蔡○瑟	崇明國中	政大 國際經營與貿易	鄭○仁	成功高中	政大 傳播學院	陳○驊	南港高中	政大 斯拉夫語文學系
李○嫻	板橋高中	政大 會計學系	嚴○溱	中山女中	政大 傳播學院	陳○智	台中二中	政大 東南亞語文學系

全國最大 ★ 最專業的連鎖 K12 教育集團

主題 12 絕對值



1. 絕對值

(1) 代數意義：

$$\text{絕對值函數定義為 } |x| = \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases}$$

(2) 對應數線上的幾何意義：

- ① $|x|$ 表示：實數線上 x 到原點的距離。
- ② $|x_1 - x_2|$ 表示：實數線上 x_1 到 x_2 的距離。

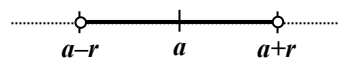
(3) 絕對值基本運算：

- ① 對於任意實數 a, b 來說， $|ab| = |a||b|$ 。
- ② 對於任意實數 a, b 來說， $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ ($b \neq 0$)。

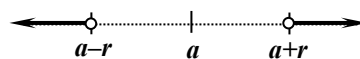
2. 數線不等式

(1) 去絕對值：

$$\text{① } |x - a| < r \ (r > 0) \Rightarrow a - r < x < a + r$$



$$\text{② } |x - a| > r \ (r > 0) \Rightarrow x < a - r \text{ 或 } x > a + r$$



【說例 1】

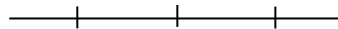
$$|x| < 2 \Rightarrow$$

【說例 2】

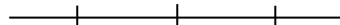
$$|x| \geq 3 \Rightarrow$$

【說例 3】

$$|x-5| \leq 2 \Rightarrow$$

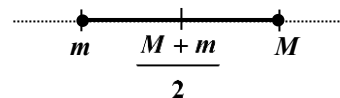
**【說例 4】**

$$|x-1| \geq 3 \Rightarrow$$

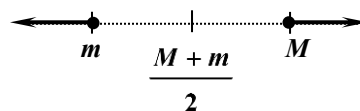


(2) 造絕對值：

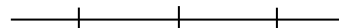
$$\textcircled{1} \quad m \leq x \leq M \Rightarrow \left| \quad \quad \quad \right| \leq$$



$$\textcircled{2} \quad x \leq m \text{ 或 } x \geq M \Rightarrow \left| \quad \quad \quad \right| \geq$$

**【說例】**

$$6 \leq x \leq 10 \Rightarrow$$

**3. 三角不等式**

(1) 實數三角不等式：

對於任意實數 a, b ，下列三角不等式恆成立：

$$\boxed{|a| + |b| \geq |a+b| \geq ||a| - |b||} \quad .$$

【證明】

分別將 $|a| + |b|$, $|a+b|$, $||a| - |b||$ 平方：

$$(|a| + |b|)^2 = a^2 + b^2 + 2|ab| \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$||a| - |b||^2 = a^2 + b^2 - 2|ab| \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

在 $\textcircled{1}\textcircled{2}\textcircled{3}$ 三式中比較 $|ab|$, ab , $-|ab|$

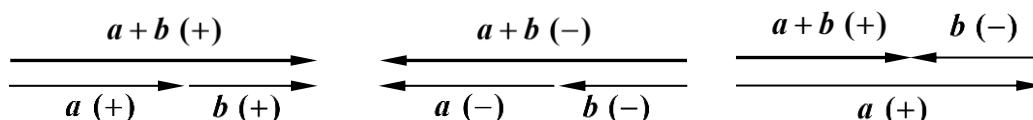
由於 $|ab| \geq ab \geq -|ab|$ ，故 $|a| + |b| \geq |a+b| \geq ||a| - |b||$

(2) 等號成立：

① 當 時， $|a| + |b| = |a+b|$ 。

② 當 時， $|a+b| = ||a| - |b||$ 。

【說明】



4. 絕對值方程式的幾何觀點

(1) 絕對值的幾何意義：

除了利用代數方式解絕對值方程式之外，由於 $|x-\alpha|$ 表示 x 與 α 在一維實數線上之距離，建議先從數線的距離觀點下手，尤其是方程式的絕對值過多時。

(2) 判定未知數的位置：

從距離觀點處理絕對值時，有些數值可以讓我們提前判定未知數的大概區間。

① $|x-1| + |x-5| = 8$



② $|x| + |x-1| + |x-5| = 20$



5. 偏差絕對值函數

(1) 偏差絕對值函數：

$f(x) = |x-\alpha_1| + |x-\alpha_2| + \cdots + |x-\alpha_n|$ ($\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 為實數) 稱為偏差絕對值函數。

(2) 中位數法則：

已知 $f(x) = |x-\alpha_1| + |x-\alpha_2| + \cdots + |x-\alpha_{n-1}| + |x-\alpha_n|$ 且 $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots \leq \alpha_{n-1} \leq \alpha_n$ ，

則 $f(x)$ 在 $x = Me$ 時有最小值，其中 Me 為 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$ 之中位數。

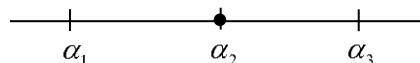
① 奇數個絕對值的中位數法則：

$f(x) = |x - \alpha_1| + |x - \alpha_2| + |x - \alpha_3|$ ($\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3$) 在 $x = \alpha_2$ (中位數) 時有 $f(x)$ 的最小值 $f(\alpha_2)$ 。

【說明】

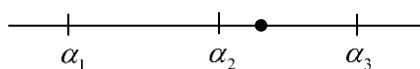
當 $x = \alpha_2$ 時，

$$f(\alpha_2) =$$



當 $x = p \neq \alpha_2$ 時，

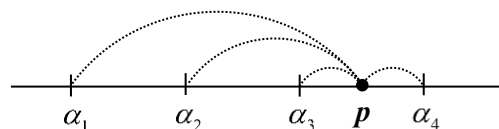
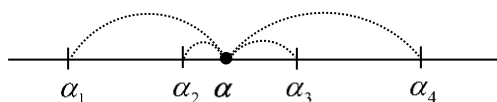
$$f(p) =$$



② 偶數個絕對值的中位數法則：

$f(x) = |x - \alpha_1| + |x - \alpha_2| + |x - \alpha_3| + |x - \alpha_4|$ ($\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3 \leq \alpha_4$) 對於區間 $[\alpha_2, \alpha_3]$ 內的任何 α 值，都有 $f(x)$ 的最小值 $f(\alpha)$ 。

【說明】



當 $x = \alpha$ 時 ($\alpha_2 \leq \alpha \leq \alpha_3$)，

$$f(\alpha) = |\alpha - \alpha_1| + |\alpha - \alpha_2| + |\alpha - \alpha_3| + |\alpha - \alpha_4| = |\alpha_4 - \alpha_1| + |\alpha_3 - \alpha_2|$$

當 $x = p$ 時 (p 不在區間 $[\alpha_2, \alpha_3]$ 內)，

$$f(p) = |p - \alpha_1| + |p - \alpha_2| + |p - \alpha_3| + |p - \alpha_4| \geq |\alpha_4 - \alpha_1| + |\alpha_3 - \alpha_2| = f(\alpha) \quad \text{【三角不等式】}$$

【說例 1】

$$f(x) = |x - 1| + |x - 3| + |x - 8| \text{ 有 } \min f(x) = \underline{\hspace{2cm}}, \text{ 此時 } x = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【說例 2】

$$f(x) = |x - 1| + |x - 2| + |x - 3| + |x - 5| \text{ 有 } \min f(x) = \underline{\hspace{2cm}}, \text{ 此時 } \underline{\hspace{2cm}}.$$

6. 絕對值方程式的處理原則

(1) 絕對值問題常用方法：

- | | |
|------------------------|------------------------|
| ① <input type="text"/> | ② <input type="text"/> |
| ③ <input type="text"/> | ④ <input type="text"/> |

(2) 題型分類：

題型	$ A \leq B $
說例	$ x-1 \leq 3x-4 $
處理原則	[法一] 兩側直接平方 [法二] 討論 $x < 1$, $1 \leq x < \frac{4}{3}$, $x \geq \frac{4}{3}$

題型	$ A \geq B$ $ A \leq B$
說例	$ x+1 \geq 2x+3$
處理原則	討論 $x < -1$, $x \geq -1$

題型	$ A + B \leq C $ $ A + B \geq C $
說例	$ x-1 + x-2 \leq 2x-3 $
處理原則	[法一] 看成 $x-1 + x-2 \leq (x-1) + (x-2)$ 再由三角不等式 $x-1 + x-2 \geq (x-1) + (x-2)$ 處理之 [法二] 討論 $x < 1$, $1 \leq x < \frac{3}{2}$, $\frac{3}{2} \leq x < 2$, $x \geq 2$

題型	多絕對值
說例	$ x-1 + x-2 + x-5 =20$
處理原則	[法一] 看成 x 分別到 1, 2, 5 的距離總和為 20， 必在 1 的左側或 5 的右側 [法二] 討論 $x < 1$, $1 \leq x < 2$, $2 \leq x < 5$, $x \geq 5$

型一 絕對值方程式

例 1

各校段考必考題型

$|ax+1| \leq b$ 之解為 $-1 \leq x \leq 5$ ，求 a, b 之值。

解 【常見錯誤】

$$\begin{aligned} |ax+1| \leq b &\Rightarrow -b \leq ax+1 \leq b \Rightarrow -b-1 \leq ax \leq b-1 \\ &\Rightarrow \frac{-b-1}{a} \leq x \leq \frac{b-1}{a} \quad [\text{錯在哪?}] \end{aligned}$$

【正解】

VEIA



例 2 平方使用時機

試解不等式 $|2x-1| \geq |x-5|$ 。

解

▣ 【衛道中學】

若實數 a 滿足 $1 < |a-1| \leq 2$ 且 $|x-a| = 3|x-9|$ ，則實數 x 的最大值為_____。

答：14

例 3

試解不等式 $3 < |2x - 1| < 5$ 。

解 【法一】

$$1^\circ \quad \text{Case 1} \quad \begin{cases} 2x - 1 \geq 0 \\ 3 < 2x - 1 < 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 2 < x < 3 \end{cases}$$

$$\text{Case 2} \quad \begin{cases} 2x - 1 < 0 \\ 3 < -(2x - 1) < 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

2° 由以上可知所求為

【法二】

TFNJ



例 4 多重絕對值

請問滿足絕對值不等式 $||x - 1| - 4| \leq 3$ 的實數 x 解之範圍。

答

▣ 【台中一中】

試問滿足 $||x - 1| - 3| \leq 4$ 的整數 x 值共有_____個。

答：13

例 5

已知方程式 $\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{x^2-2x+1}=6$ ，求實數 x 。

解 將原方程式改寫為：

從距離大小與數線上的位置，其實可以看得出 x 在 1 的左側或在 2 的右側；
若是其他方程式數據，可能較難觀察 x 大概的位置，所以我們以通則來分析：

AGHB



例 6

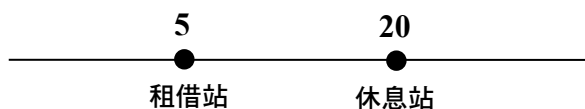
已知方程式 $|x-1|+|x-2|+|x-6|=15$ ，求實數 x 。

解

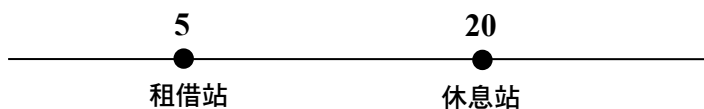
例 7

各校重要考題

如下圖所示，在一條東西向的筆直景觀道路上，有一家電動機車租借站與休息站，分別位於道路里程 5 與 20 的位置。遊客租借電動機車騎乘時，偶爾會在路上耗盡電力而需要道路救援。由於人力與成本的考量，若「救援位置與租借站的距離」再加上「救援位置與休息站距離的 1.5 倍」不大於 30 時，可以免費服務，則可以免費救援的里程區間為_____。



解



▣ 【台中女中】

解不等式 $|x+2| - |x-1| < x+1$ 。

答： $x > 2$ 或 $-4 < x < 0$

型二**偏差絕對值函數****例 8**

係數是 1 要如何處理?

求使得方程式 $|x-1|+|x-2|+|x-5|=k$ 有實數 x 解的 k 範圍。**解****例 9**

係數是 1 要如何處理?

求解不等式 $|x-1|+|x-5|>3$ 。**解****例 10**

係數不是 1 要如何處理?

求 $f(x)=3|x-1|+|x-2|+2|x-4|+|x-5|$ 的最小值與對應的 x 值。**解****▣ [挑戰題]**求 $f(x)=|x-1|+\frac{1}{2}|x-2|+\frac{1}{3}|x+3|$ 的最小值與對應的 x 值。答： $\frac{11}{6}$ ，此時 $x=1$

下列各方程式中，請選出有實數解的選項：

(1) $|x| + |x-5| = 1$

(2) $|x| + |x-5| = 6$

(3) $|x| - |x-5| = 1$

(4) $|x| - |x-5| = 6$

(5) $|x| - |x-5| = -1$ 。

解

$|x| + |x-5|$ 可以表示一維數線上，「 x 至原點的距離」與「 x 至 5 的距離」之和

同理， $|x| - |x-5|$ 可以表示一維數線上，「 x 至原點的距離」與「 x 至 5 的距離」之差

由於 $|x| + |x-5|$ 的最小值為 5，故方程式 $|x| + |x-5| = k$ 有實數 x 解的條件是_____。

接下來，我們來討論方程式 $|x| - |x-5| = k$ 有實數 x 解的條件：

圖 示			
$a - b$			

由於 $|x| - |x-5| = k$ 的最小值為 -5 ，最大值為 5 ，

故方程式 $|x| - |x-5| = k$ 有實數 x 解的條件是_____。

故選_____。

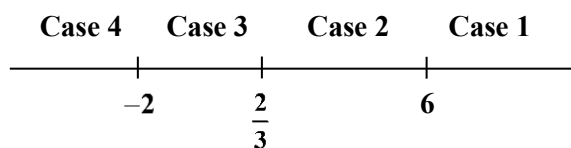
型三 三角不等式

例 12

試解 $|x-6|+|2x+4|\leq|3x-2|$ 之 x 的實數範圍。

解 【法一】討論

可以把實數區間分成四個區域：



Case 1 當 $x \geq 6$ 時, $\begin{cases} x \geq 6 \\ (x-6) + (2x+4) \leq (3x-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 6 \\ x \text{ 為任意實數} \end{cases} \Rightarrow x \geq 6$

Case 2 當 $\frac{2}{3} \leq x < 6$ 時, $\begin{cases} \frac{2}{3} \leq x < 6 \\ (6-x) + (2x+4) \leq (3x-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{3} \leq x < 6 \\ x \geq 6 \end{cases} \Rightarrow x \text{ 無解}$

Case 3 當 $-2 \leq x < \frac{2}{3}$ 時, $\begin{cases} -2 \leq x < \frac{2}{3} \\ (6-x) + (2x+4) \leq (2-3x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 \leq x < \frac{2}{3} \\ x \leq -2 \end{cases} \Rightarrow x = -2$

Case 4 當 $x < -2$ 時, $\begin{cases} x < -2 \\ (6-x) + (-2x-4) \leq (2-3x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -2 \\ x \text{ 為任意實數} \end{cases} \Rightarrow x < -2$

由以上可知實數 x 範圍為 $x \leq -2$ 或 $x \geq 6$

【法二】三角不等式

$$\because | \quad | + | \quad | \geq | \quad |, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

但題給 $| \quad | + | \quad | \leq | \quad |$

$\therefore$

▣ [挑戰題]

試解 $|2x-6|+|x-2|\leq|x-4|$ 之 x 的實數範圍。

答： $2\leq x\leq 3$

Topic 1-3

指 數

主題 13 指數律與基本運算

IUNG



1. 指數與底數

(1) 指數式：

對於任何 a^x 型式寫法，我們稱為**指數式**，其結果稱為**冪 (power)**。稱 a 為

(base number)，稱 x 為 (exponent)。但 0^0 無意義。

【說例】

1024 可寫成 2^{10} 型式，其中 2 為底數，10 為指數。

(2) 指數的討論：

若 $a > 0$ ，以下就不同的實數指數 x 來討論 a^x 的意義。

① 若指數為**正整數 n** ，則 $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\text{個}}$ 。例如 $5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ 。

② 若指數為**0**，則 $a^x = a^0 = 1$ 。

③ 若指數為**負整數 $-n$** ，則 $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ 。

④ 若指數為**正有理數 $\frac{1}{n}$** (n 為正整數)，則 $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ ，例如 $a^{\frac{1}{5}} = \text{}$ 。

⑤ 若指數為**正有理數 $\frac{m}{n}$** (m, n 皆為正整數)，則 $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$ 。

【說例】

$$a^{\frac{7}{4}} \begin{cases} \nearrow \text{} = \text{} \\ \searrow \text{} = \text{} \end{cases}$$

⑥ 若指數為**正無理數**，則利用數列的極限來定義無理數指數，如 $a^{\sqrt{2}}$ 與 a^{π} 。

【說例】

$\sqrt{2}=1.4142\cdots$ ，數列 $a^{1.4}, a^{1.41}, a^{1.414}, a^{1.4142}, \cdots$ 的極限定義為 $a^{\sqrt{2}}$ 。

⑦ 若指數為**負數** $-n$ ，則 $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ 。例如 $a^{\frac{-5}{7}} =$ 。

(3) 指數的計算機運算：

① 1.01^{365} 如何求值：

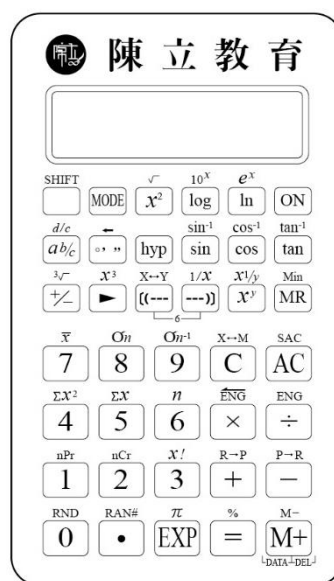
⇒ 1.01 ⇒ x^y ⇒ 365 ⇒ =

② $(0.99)^{365}$ 如何求值：

⇒ 0.99 ⇒ x^y ⇒ 365 ⇒ =

③ $5^{0.5}$ 如何求值：

⇒ 5 ⇒ x^y ⇒ 0.5 ⇒ =



2. 實數指數運算

(1) 指數律：

對於 $a > 0$, $b > 0$, x, y 為實數，以下指數律恆成立：

① $a^x \cdot a^y =$

② $\frac{a^x}{a^y} =$

③ $(a^x)^y =$

④ $(ab)^x =$

⑤ $\left(\frac{a}{b}\right)^x =$

【說例 1】

$$\sqrt[3]{\sqrt{a}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

【說例 2】

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a} = \underline{\hspace{2cm}}$$

(2) 指數式相等的處理原則：

① 指數順序性：

$$a^{x^y} = \boxed{\hspace{2cm}} \quad (a > 0, x, y \text{ 為實數})$$

【說例】

$$2^{3^2} \times 4^{2^5} =$$

② 底數相同的指數式怎麼討論？

若 $a^x = a^y$ ($a > 0$ 且 x, y 為實數)，必須討論以下情形：

Case 1 若 $a = 1$ ，則 x 不一定等於 y ，例如 $1^3 = 1^4$ 或 $1^4 = 1^4$ 。

Case 2 若 $a \neq 1$ ，則 $x = y$ 。

③ 底數不同的指數式怎麼討論？

若 $a^x = b^y$ ($a > 0, b > 0$ 且 x, y 為實數)，先考慮是否可化成同底數；

若不能化同底數，則討論以下情形：

Case 1 若 $a^x = 1$ 且 $a^x = b^y$ ，則 $b^y = 1$ ，故 $b = 1$ 或 $y = 0$ 。

Case 2 若 $a^x \neq 1$ 且 $a^x = b^y$ ，則我們最多只能得到 $(a^x)^{\frac{1}{x}} = (b^y)^{\frac{1}{y}}$ ，即 $a = b^{\frac{y}{x}}$ 。

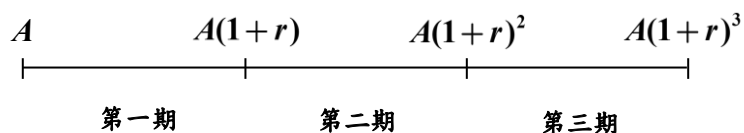
【說明】

若 $3^x = 4^y$ ，則 $x = y = 0$ 或 $3 = 4^{\frac{y}{x}}$ 。

3. 利率概念

(1) 複利的概念：

若將本金 A 元存入銀行，期利率為 r ，如以**複利**計算，且每期複利一次， n 期過後可得本利和 $A(1+r)^n$ 元。



【說例】

若將本金 A 元存入銀行，年利率為 3%，每年複利一次，5 年過後可得本利和為_____元。

(2) 利率分割：

若將本金 A 元存入銀行，年利率為 12%，每期以複利計息， n 年過後：

- ① 若**每年**為一期，則 n 年過後可得本利和_____元。
- ② 若**每半年**為一期，則 n 年過後可得本利和_____元。
- ③ 若**每季**為一期，則 n 年過後可得本利和_____元。

型一 指數式的運算

例 1

化簡下列各式：

$$\begin{array}{ll} (1) [a^3 \cdot (a^{-2})^4]^{-1} & (2) \sqrt[3]{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[5]{a^4}}} \\ (3) (2+\sqrt{3})^8(2-\sqrt{3})^{10} & (4) 729^{\frac{-1}{3}} + 32^{\frac{3}{5}} + \left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{-1}{3}} \end{array}$$

解 (1) $[a^3 \cdot (a^{-2})^4]^{-1} = (a^3 \cdot a^{-8})^{-1} = (a^{-5})^{-1} = a^5$

$$(2) \sqrt[3]{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[5]{a^4}}} =$$

$$\begin{aligned} (3) (2+\sqrt{3})^8(2-\sqrt{3})^{10} &= (2+\sqrt{3})^8(2-\sqrt{3})^8 \cdot (2-\sqrt{3})^2 = ((2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}))^8 \cdot (4+3-4\sqrt{3}) \\ &= (4-3)^8 \cdot (7-4\sqrt{3}) = 7-4\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) 729^{\frac{-1}{3}} + 32^{\frac{3}{5}} + \left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{-1}{3}} &= (3^6)^{\frac{-1}{3}} + (2^5)^{\frac{3}{5}} + (3^{-3})^{\frac{-1}{3}} = 3^{-2} + 2^3 + 3 \\ &= \frac{1}{9} + 8 + 3 = \frac{100}{9} \end{aligned}$$

⇒ 這種指數式的化簡，計算不難，但需要的是細心。

很多學校期中考的計算量都考到像下面這一題的難度。同學們來試一下吧！

已知 $\frac{\sqrt[7]{4\sqrt[4]{16^3 \cdot 8^{-2}}}}{\sqrt[3]{2^2 \sqrt{2^{-3}}}} = \left(\frac{1}{16}\right)^n$ ，試求 n 之值。

答： $\frac{1}{24}$



例 2

已知 $x \geq 0$ 且 $x^{2^x} = x^{16}$ ，求 x 之值。

解

例 3

若 $3^{-2x} = 4$ ，求 9^{x-1} 之值。

解

例 4

若 $17^{2x} = 15$ 且 $15^{3y} = 17$ ，試求 xy 之值。

解

例 5

已知 n 為自然數，且 $n < 6^{\frac{5}{3}} < n+1$ ，試求 n 之值。

解

例 6

已知 $8^x = 9^y = 6^z$ ，若 $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = \frac{k}{z}$ ，求 k 之值。

解

ASGW



例 7

已知 $(2.5)^x = (0.025)^y = 1000$ ，求 $\frac{1}{x} - \frac{1}{y}$ 之值。

解

CDNT



型二 雙曲函數

例 8

各校段考重要題型

設 $a^{2x} = \sqrt{2} + 1$ ，則 $\frac{a^{3x} + a^{-3x}}{a^x + a^{-x}} =$ _____。

解

HWQV



回 [建國中學]

a, b 為實數，已知 $25^a = \sqrt{3} - 1$ ，及 $\frac{125^a + 125^{-a}}{5^a + 5^{-a}} = b \cdot 25^a$ ，試求 b 之值為_____。

答： $\frac{3}{2}$

例 9

各校段考重要題型

設 $a > 0$ 且 $a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{-1}{2}} = 3$ ，試求下列各式之值：

(1) $a + a^{-1}$ (2) $a^2 + a^{-2}$ (3) $a^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{-3}{2}}$ (4) $a^{\frac{1}{4}} + a^{\frac{-1}{4}}$

解



▣ [台中女中]

設 $a^x - a^{-x} = 1$ ，則 $\frac{a^{3x} - a^{-3x}}{a^x + a^{-x}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答： $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

▣ [建國中學]

設 $a > 0$ ，且 $a^{2x} = 7 - 4\sqrt{3}$ ，則 $\frac{a^{4x} + a^{-4x}}{a^x + a^{-x}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答：48.5

型三 複利問題

例 10

小沂參加銀行存款，約定以年利率 1% 的複利，一年為一期計息。若小沂在今年年初存入 10000 元，則 15 年後可得本利和 _____ 元。 [計算機操作]

解



例 11

假設某個國家 40 年後，人口將**增加為**目前的 2 倍 (經過相同時間成長倍數相同)。

- (1) 10 年後人口是目前的幾倍？
- (2) 5 年後人口是目前的幾倍？

解



例 12

設於某項新實驗中，細菌數 1 日後增加 a 倍，且已知 3 日後細菌數為 200000， $4\frac{1}{2}$ 日後其數為 1600000，求當細菌數到達 800000 時所需日數。

解

DHWE



型四**半衰期問題****例 13**

放射性物質的質量 (或濃度) 衰變成原本的一半時所需的時間，我們稱為「半衰期」。

已知某放射性物質，4 天後剩下 40 克，6 天後剩下 20 克，試回答下列問題：

(1) 此放射性物質的半衰期為 _____ 天。

(2) 此放射性物質原有 _____ 克。

解

設剛開始時，質量為 A ，且該物質半衰期為 t 天

ZCAB



放射性物質的半衰期 T 定義為每經過時間 T ，該物質的質量會衰退成原來的一半。今有甲、乙兩種物質，開始記錄時甲物質的質量是乙物質的兩倍，而已知甲的半衰期為 15 小時，且經過 60 小時後，甲物質的質量是乙物質的 8 倍。則乙物質的半衰期是_____小時。

解 設剛開始時，甲、乙的質量分別為 $2A$ 、 A ，且乙的半衰期為 t 小時

▣ 【台南女中】

放射性物質的半衰期 T 定義為每經過時間 T ，該物質的質量會衰退成原來的一半。鉛製容器中有兩種放射性物質 A 、 B ，開始記錄時容器中物質 B 的質量為物質 A 的 4 倍，而 48 天後兩種物質的質量相同。已知物質 A 的半衰期為 12 天，請問物質 B 的半衰期為幾天？

- (1) 2 天 (2) 4 天 (3) 6 天 (4) 8 天 (5) 10 天 。
- 答：(4)

型五 傳染病模型問題

例 15

某一類的傳染病接觸，感染後人便會產生抗體而終身免疫，此類的傳染病的感染率 $I(t)$ 定義為

$$I(t) = \frac{\text{在時間 } t \text{ 時被感染過的人數}}{\text{這城市的總人數}}。$$

根據衛生組織的調查研究建立了一個關於 $I(t)$ 的數學模型： $I(t) = \frac{1}{1+a \cdot 7^{-bt}}$ 。某種此

類的傳染病在某個城市蔓延，剛開始 (即 $t=0$ 週時)，約有 2% 的人口被感染，當 $t=3$ 週，約有 12.5% 的人口被感染，試回答下列問題：

- (1) 數對 $(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
- (2) 請問 9 週之後，該城市約有多少比例的人口被感染此傳染病？

解

BCBV



型六 進階技巧型問題

例 16

自行參考

已知 n 為正整數，且 $x = \frac{1}{2}(5^{\frac{1}{n}} + 5^{\frac{-1}{n}})$ ，求 $(x + \sqrt{x^2 - 1})^n$ 之值。

解 1° $(a^x + a^{-x})^2 = (a^x - a^{-x})^2 + 4$

$$\Rightarrow \left(\frac{a^x + a^{-x}}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^x - a^{-x}}{2}\right)^2 + 1$$

2° $x = \frac{5^{\frac{1}{n}} + 5^{\frac{-1}{n}}}{2} \Rightarrow x^2 = \left(\frac{5^{\frac{1}{n}} + 5^{\frac{-1}{n}}}{2}\right)^2 = \left(\frac{5^{\frac{1}{n}} - 5^{\frac{-1}{n}}}{2}\right)^2 + 1$

$$\therefore x^2 - 1 = \left(\frac{5^{\frac{1}{n}} - 5^{\frac{-1}{n}}}{2}\right)^2$$

3° $(x + \sqrt{x^2 - 1})^n = \left[\frac{5^{\frac{1}{n}} + 5^{\frac{-1}{n}}}{2} + \sqrt{\left(\frac{5^{\frac{1}{n}} - 5^{\frac{-1}{n}}}{2}\right)^2}\right]^n$

$$= \left(\frac{5^{\frac{1}{n}} + 5^{\frac{-1}{n}}}{2} + \left|\frac{5^{\frac{1}{n}} - 5^{\frac{-1}{n}}}{2}\right|\right)^n \quad \left(\because \frac{1}{n} > \frac{-1}{n} \therefore 5^{\frac{1}{n}} > 5^{\frac{-1}{n}}\right)$$

$$= \left(\frac{5^{\frac{1}{n}} + 5^{\frac{-1}{n}}}{2} + \frac{5^{\frac{1}{n}} - 5^{\frac{-1}{n}}}{2}\right)^n = (5^{\frac{1}{n}})^n = 5$$

▣ 觀察以下的類題，你或許會有一些推論：

① 已知 n 為正整數，且 $x = \frac{1}{2}(3^{\frac{1}{n}} + 3^{\frac{-1}{n}})$ ，則 $(x + \sqrt{x^2 - 1})^n = 3$ 。

② 已知 n 為正整數，且 $x = \frac{1}{2}(7^{\frac{1}{n}} + 7^{\frac{-1}{n}})$ ，則 $(x + \sqrt{x^2 - 1})^n = 7$ 。

③ 已知 n 為正整數，且 $x = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{-1}{n}}\right)$ ，則 $(x + \sqrt{x^2 - 1})^n = 3$ 。

④ 已知 n 為正整數，且 $x = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{-1}{n}}\right)$ ，則 $(x + \sqrt{x^2 - 1})^n = 7$ 。



例 17

已知 $f(x) = \frac{4^x}{4^x + 2}$ ，求 $f(\frac{1}{101}) + f(\frac{2}{101}) + f(\frac{3}{101}) + \cdots + f(\frac{100}{101})$ 之值。

解

KFZS



例 18

求 $\frac{9^{\frac{1}{9}}}{9^{\frac{1}{9}} + 3} + \frac{9^{\frac{2}{9}}}{9^{\frac{2}{9}} + 3} + \frac{9^{\frac{3}{9}}}{9^{\frac{3}{9}} + 3} + \cdots + \frac{9^{\frac{6}{9}}}{9^{\frac{6}{9}} + 3} + \frac{9^{\frac{7}{9}}}{9^{\frac{7}{9}} + 3} + \frac{9^{\frac{8}{9}}}{9^{\frac{8}{9}} + 3}$ 之值。

解

Topic 1-4

常用對數