

主題 13 指數律與基本運算

IUNG



1. 指數與底數

(1) 指數式：

對於任何 a^x 型式寫法，我們稱為**指數式**，其結果稱為**冪 (power)**。稱 a 為

(base number)，稱 x 為 (exponent)。但 0^0 無意義。

【說例】

1024 可寫成 2^{10} 型式，其中 2 為底數，10 為指數。

(2) 指數的討論：

若 $a > 0$ ，以下就不同的實數指數 x 來討論 a^x 的意義。

① 若指數為**正整數 n** ，則 $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\text{個}}$ 。例如 $5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ 。

② 若指數為**0**，則 $a^x = a^0 = 1$ 。

③ 若指數為**負整數 $-n$** ，則 $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ 。

④ 若指數為**正有理數 $\frac{1}{n}$** (n 為正整數)，則 $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ ，例如 $a^{\frac{1}{5}} = \text{}$ 。

⑤ 若指數為**正有理數 $\frac{m}{n}$** (m, n 皆為正整數)，則 $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$ 。

【說例】

$$a^{\frac{7}{4}} \begin{cases} \nearrow \text{} = \text{} \\ \searrow \text{} = \text{} \end{cases}$$

⑥ 若指數為**正無理數**，則利用數列的極限來定義無理數指數，如 $a^{\sqrt{2}}$ 與 a^{π} 。

【說例】

$\sqrt{2}=1.4142\cdots$ ，數列 $a^{1.4}, a^{1.41}, a^{1.414}, a^{1.4142}, \cdots$ 的極限定義為 $a^{\sqrt{2}}$ 。

⑦ 若指數為**負數** $-n$ ，則 $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ 。例如 $a^{\frac{-5}{7}} =$ 。

(3) 指數的計算機運算：

① 1.01^{365} 如何求值：

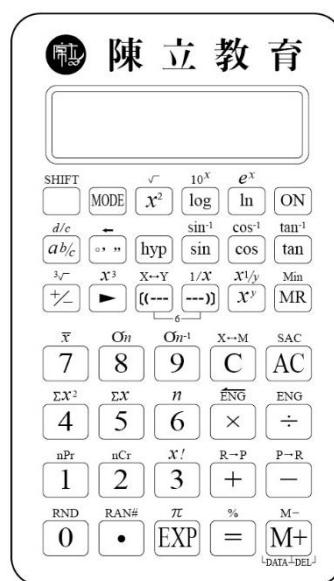
⇒ 1.01 ⇒ x^y ⇒ 365 ⇒ =

② $(0.99)^{365}$ 如何求值：

⇒ 0.99 ⇒ x^y ⇒ 365 ⇒ =

③ $5^{0.5}$ 如何求值：

⇒ 5 ⇒ x^y ⇒ 0.5 ⇒ =



2. 實數指數運算

(1) 指數律：

對於 $a > 0$, $b > 0$, x, y 為實數，以下指數律恆成立：

① $a^x \cdot a^y =$

② $\frac{a^x}{a^y} =$

③ $(a^x)^y =$

④ $(ab)^x =$

⑤ $\left(\frac{a}{b}\right)^x =$

【說例 1】

$$\sqrt[3]{\sqrt{a}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

【說例 2】

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a} = \underline{\hspace{2cm}}$$

(2) 指數式相等的處理原則：

① 指數順序性：

$$a^{x^y} = \boxed{\hspace{2cm}} \quad (a > 0, x, y \text{ 為實數})$$

【說例】

$$2^{3^2} \times 4^{2^5} =$$

② 底數相同的指數式怎麼討論？

若 $a^x = a^y$ ($a > 0$ 且 x, y 為實數)，必須討論以下情形：

Case 1 若 $a = 1$ ，則 x 不一定等於 y ，例如 $1^3 = 1^4$ 或 $1^4 = 1^4$ 。

Case 2 若 $a \neq 1$ ，則 $x = y$ 。

③ 底數不同的指數式怎麼討論？

若 $a^x = b^y$ ($a > 0, b > 0$ 且 x, y 為實數)，先考慮是否可化成同底數；

若不能化同底數，則討論以下情形：

Case 1 若 $a^x = 1$ 且 $a^x = b^y$ ，則 $b^y = 1$ ，故 $b = 1$ 或 $y = 0$ 。

Case 2 若 $a^x \neq 1$ 且 $a^x = b^y$ ，則我們最多只能得到 $(a^x)^{\frac{1}{x}} = (b^y)^{\frac{1}{y}}$ ，即 $a = b^{\frac{y}{x}}$ 。

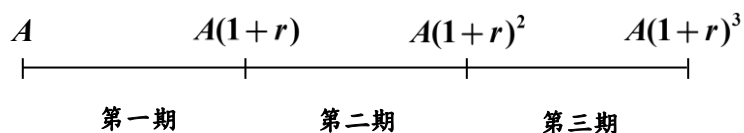
【說明】

若 $3^x = 4^y$ ，則 $x = y = 0$ 或 $3 = 4^{\frac{y}{x}}$ 。

3. 利率概念

(1) 複利的概念：

若將本金 A 元存入銀行，期利率為 r ，如以**複利**計算，且每期複利一次， n 期過後可得本利和 $A(1+r)^n$ 元。



【說例】

若將本金 A 元存入銀行，年利率為 3%，每年複利一次，5 年過後可得本利和為_____元。

(2) 利率分割：

若將本金 A 元存入銀行，年利率為 12%，每期以複利計息， n 年過後：

- ① 若**每年**為一期，則 n 年過後可得本利和_____元。
- ② 若**每半年**為一期，則 n 年過後可得本利和_____元。
- ③ 若**每季**為一期，則 n 年過後可得本利和_____元。

型一 指數式的運算

例 1

化簡下列各式：

$$(1) [a^3 \cdot (a^{-2})^4]^{-1}$$

$$(2) \sqrt[3]{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[5]{a^4}}}$$

$$(3) (2 + \sqrt{3})^8 (2 - \sqrt{3})^{10}$$

$$(4) 729^{\frac{-1}{3}} + 32^{\frac{3}{5}} + \left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{-1}{3}}$$

解 (1) $[a^3 \cdot (a^{-2})^4]^{-1} = (a^3 \cdot a^{-8})^{-1} = (a^{-5})^{-1} = a^5$

$$(2) \sqrt[3]{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[5]{a^4}}} =$$

$$(3) (2 + \sqrt{3})^8 (2 - \sqrt{3})^{10} = (2 + \sqrt{3})^8 (2 - \sqrt{3})^8 \cdot (2 - \sqrt{3})^2 = ((2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}))^8 \cdot (4 + 3 - 4\sqrt{3})$$

$$= (4 - 3)^8 \cdot (7 - 4\sqrt{3}) = 7 - 4\sqrt{3}$$

$$(4) 729^{\frac{-1}{3}} + 32^{\frac{3}{5}} + \left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{-1}{3}} = (3^6)^{\frac{-1}{3}} + (2^5)^{\frac{3}{5}} + (3^{-3})^{\frac{-1}{3}} = 3^{-2} + 2^3 + 3$$

$$= \frac{1}{9} + 8 + 3 = \frac{100}{9}$$

⇒ 這種指數式的化簡，計算不難，但需要的是細心。

很多學校期中考的計算量都考到像下面這一題的難度。同學們來試一下吧！

已知 $\frac{\sqrt[7]{4\sqrt[4]{16^3 \cdot 8^{-2}}}}{\sqrt[3]{2^2 \sqrt{2^{-3}}}} = \left(\frac{1}{16}\right)^n$ ，試求 n 之值。

答： $\frac{1}{24}$



例 2

已知 $x \geq 0$ 且 $x^{2^x} = x^{16}$ ，求 x 之值。

解

例 3

若 $3^{-2x} = 4$ ，求 9^{x-1} 之值。

解

例 4

若 $17^{2x} = 15$ 且 $15^{3y} = 17$ ，試求 xy 之值。

解

例 5

已知 n 為自然數，且 $n < 6^{\frac{5}{3}} < n+1$ ，試求 n 之值。

解

例 6

已知 $8^x = 9^y = 6^z$ ，若 $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = \frac{k}{z}$ ，求 k 之值。

解

ASGW



例 7

已知 $(2.5)^x = (0.025)^y = 1000$ ，求 $\frac{1}{x} - \frac{1}{y}$ 之值。

解

CDNT



型二 雙曲函數

例 8

各校段考重要題型

設 $a^{2x} = \sqrt{2} + 1$ ，則 $\frac{a^{3x} + a^{-3x}}{a^x + a^{-x}} =$ _____。

解

HWQV



回 [建國中學]

a, b 為實數，已知 $25^a = \sqrt{3} - 1$ ，及 $\frac{125^a + 125^{-a}}{5^a + 5^{-a}} = b \cdot 25^a$ ，試求 b 之值為_____。

答： $\frac{3}{2}$

例 9

各校段考重要題型

設 $a > 0$ 且 $a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{-1}{2}} = 3$ ，試求下列各式之值：

(1) $a + a^{-1}$ (2) $a^2 + a^{-2}$ (3) $a^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{-3}{2}}$ (4) $a^{\frac{1}{4}} + a^{\frac{-1}{4}}$

解



▣ [台中女中]

設 $a^x - a^{-x} = 1$ ，則 $\frac{a^{3x} - a^{-3x}}{a^x + a^{-x}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答： $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

▣ [建國中學]

設 $a > 0$ ，且 $a^{2x} = 7 - 4\sqrt{3}$ ，則 $\frac{a^{4x} + a^{-4x}}{a^x + a^{-x}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答：48.5

型三 複利問題

例 10

小沂參加銀行存款，約定以年利率 1% 的複利，一年為一期計息。若小沂在今年年初存入 10000 元，則 15 年後可得本利和 _____ 元。 [計算機操作]

解



例 11

假設某個國家 40 年後，人口將**增加為**目前的 2 倍 (經過相同時間成長倍數相同)。

- (1) 10 年後人口是目前的幾倍？
- (2) 5 年後人口是目前的幾倍？

解



例 12

設於某項新實驗中，細菌數 1 日後增加 a 倍，且已知 3 日後細菌數為 200000， $4\frac{1}{2}$ 日後其數為 1600000，求當細菌數到達 800000 時所需日數。

解

DHWE



型四**半衰期問題****例 13**

放射性物質的質量 (或濃度) 衰變成原本的一半時所需的時間，我們稱為「半衰期」。

已知某放射性物質，4 天後剩下 40 克，6 天後剩下 20 克，試回答下列問題：

(1) 此放射性物質的半衰期為 _____ 天。

(2) 此放射性物質原有 _____ 克。

解

設剛開始時，質量為 A ，且該物質半衰期為 t 天

ZCAB



放射性物質的半衰期 T 定義為每經過時間 T ，該物質的質量會衰退成原來的一半。今有甲、乙兩種物質，開始記錄時甲物質的質量是乙物質的兩倍，而已知甲的半衰期為 15 小時，且經過 60 小時後，甲物質的質量是乙物質的 8 倍。則乙物質的半衰期是_____小時。

解 設剛開始時，甲、乙的質量分別為 $2A$ 、 A ，且乙的半衰期為 t 小時

▣ 【台南女中】

放射性物質的半衰期 T 定義為每經過時間 T ，該物質的質量會衰退成原來的一半。鉛製容器中有兩種放射性物質 A 、 B ，開始記錄時容器中物質 B 的質量為物質 A 的 4 倍，而 48 天後兩種物質的質量相同。已知物質 A 的半衰期為 12 天，請問物質 B 的半衰期為幾天？

- (1) 2 天 (2) 4 天 (3) 6 天 (4) 8 天 (5) 10 天 。
- 答：(4)

型五**傳染病模型問題****例 15**

某一類的傳染病接觸，感染後人便會產生抗體而終身免疫，此類的傳染病的感染率 $I(t)$ 定義為

$$I(t) = \frac{\text{在時間 } t \text{ 時被感染過的人數}}{\text{這城市的總人數}}。$$

根據衛生組織的調查研究建立了一個關於 $I(t)$ 的數學模型： $I(t) = \frac{1}{1+a \cdot 7^{-bt}}$ 。某種此

類的傳染病在某個城市蔓延，剛開始 (即 $t=0$ 週時)，約有 2% 的人口被感染，當 $t=3$ 週，約有 12.5% 的人口被感染，試回答下列問題：

- (1) 數對 $(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
- (2) 請問 9 週之後，該城市約有多少比例的人口被感染此傳染病？

解

BCBV



型六 進階技巧型問題

例 16

自行參考

已知 n 為正整數，且 $x = \frac{1}{2}(5^{\frac{1}{n}} + 5^{\frac{-1}{n}})$ ，求 $(x + \sqrt{x^2 - 1})^n$ 之值。

解 1° $(a^x + a^{-x})^2 = (a^x - a^{-x})^2 + 4$

$$\Rightarrow \left(\frac{a^x + a^{-x}}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^x - a^{-x}}{2}\right)^2 + 1$$

$$2^\circ \quad x = \frac{5^{\frac{1}{n}} + 5^{\frac{-1}{n}}}{2} \Rightarrow x^2 = \left(\frac{5^{\frac{1}{n}} + 5^{\frac{-1}{n}}}{2}\right)^2 = \left(\frac{5^{\frac{1}{n}} - 5^{\frac{-1}{n}}}{2}\right)^2 + 1$$

$$\therefore x^2 - 1 = \left(\frac{5^{\frac{1}{n}} - 5^{\frac{-1}{n}}}{2}\right)^2$$

$$\begin{aligned} 3^\circ \quad (x + \sqrt{x^2 - 1})^n &= \left[\frac{5^{\frac{1}{n}} + 5^{\frac{-1}{n}}}{2} + \sqrt{\left(\frac{5^{\frac{1}{n}} - 5^{\frac{-1}{n}}}{2}\right)^2}\right]^n \\ &= \left(\frac{5^{\frac{1}{n}} + 5^{\frac{-1}{n}}}{2} + \left|\frac{5^{\frac{1}{n}} - 5^{\frac{-1}{n}}}{2}\right|\right)^n \quad \left(\because \frac{1}{n} > \frac{-1}{n} \quad \therefore 5^{\frac{1}{n}} > 5^{\frac{-1}{n}}\right) \\ &= \left(\frac{5^{\frac{1}{n}} + 5^{\frac{-1}{n}}}{2} + \frac{5^{\frac{1}{n}} - 5^{\frac{-1}{n}}}{2}\right)^n = (5^{\frac{1}{n}})^n = 5 \end{aligned}$$

▣ 觀察以下的類題，你或許會有一些推論：

① 已知 n 為正整數，且 $x = \frac{1}{2}(3^{\frac{1}{n}} + 3^{\frac{-1}{n}})$ ，則 $(x + \sqrt{x^2 - 1})^n = 3$ 。

② 已知 n 為正整數，且 $x = \frac{1}{2}(7^{\frac{1}{n}} + 7^{\frac{-1}{n}})$ ，則 $(x + \sqrt{x^2 - 1})^n = 7$ 。

③ 已知 n 為正整數，且 $x = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{-1}{n}}\right)$ ，則 $(x + \sqrt{x^2 - 1})^n = 3$ 。

④ 已知 n 為正整數，且 $x = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{-1}{n}}\right)$ ，則 $(x + \sqrt{x^2 - 1})^n = 7$ 。



例 17

已知 $f(x) = \frac{4^x}{4^x + 2}$ ，求 $f(\frac{1}{101}) + f(\frac{2}{101}) + f(\frac{3}{101}) + \cdots + f(\frac{100}{101})$ 之值。

解

KFZS



例 18

求 $\frac{9^{\frac{1}{9}}}{9^{\frac{1}{9}} + 3} + \frac{9^{\frac{2}{9}}}{9^{\frac{2}{9}} + 3} + \frac{9^{\frac{3}{9}}}{9^{\frac{3}{9}} + 3} + \cdots + \frac{9^{\frac{6}{9}}}{9^{\frac{6}{9}} + 3} + \frac{9^{\frac{7}{9}}}{9^{\frac{7}{9}} + 3} + \frac{9^{\frac{8}{9}}}{9^{\frac{8}{9}} + 3}$ 之值。

解

Topic 1-4

常用對數