

主題 12 絕對值



1. 絕對值

(1) 代數意義：

$$\text{絕對值函數定義為 } |x| = \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases}$$

(2) 對應數線上的幾何意義：

- ① $|x|$ 表示：實數線上 x 到原點的距離。
- ② $|x_1 - x_2|$ 表示：實數線上 x_1 到 x_2 的距離。

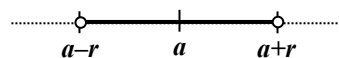
(3) 絕對值基本運算：

- ① 對於任意實數 a, b 來說， $|ab| = |a||b|$ 。
- ② 對於任意實數 a, b 來說， $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ ($b \neq 0$)。

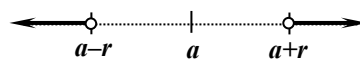
2. 數線不等式

(1) 去絕對值：

$$\textcircled{1} \quad |x - a| < r \quad (r > 0) \Rightarrow a - r < x < a + r$$



$$\textcircled{2} \quad |x - a| > r \quad (r > 0) \Rightarrow x < a - r \text{ 或 } x > a + r$$



【說例 1】

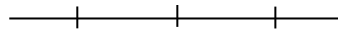
$$|x| < 2 \Rightarrow$$

【說例 2】

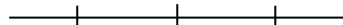
$$|x| \geq 3 \Rightarrow$$

【說例 3】

$$|x-5| \leq 2 \Rightarrow$$

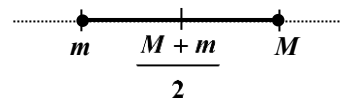
**【說例 4】**

$$|x-1| \geq 3 \Rightarrow$$

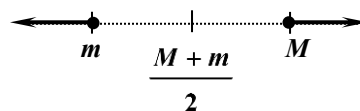


(2) 造絕對值：

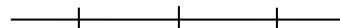
$$\textcircled{1} \quad m \leq x \leq M \Rightarrow \left| \quad \quad \quad \right| \leq$$



$$\textcircled{2} \quad x \leq m \text{ 或 } x \geq M \Rightarrow \left| \quad \quad \quad \right| \geq$$

**【說例】**

$$6 \leq x \leq 10 \Rightarrow$$

**3. 三角不等式**

(1) 實數三角不等式：

對於任意實數 a, b ，下列三角不等式恆成立：

$$\boxed{|a| + |b| \geq |a+b| \geq ||a| - |b||} \quad .$$

【證明】

分別將 $|a| + |b|$, $|a+b|$, $||a| - |b||$ 平方：

$$(|a| + |b|)^2 = a^2 + b^2 + 2|ab| \quad \cdots \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \quad \cdots \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$||a| - |b||^2 = a^2 + b^2 - 2|ab| \quad \cdots \cdots \cdots \textcircled{3}$$

在 $\textcircled{1}\textcircled{2}\textcircled{3}$ 三式中比較 $|ab|$, ab , $-|ab|$

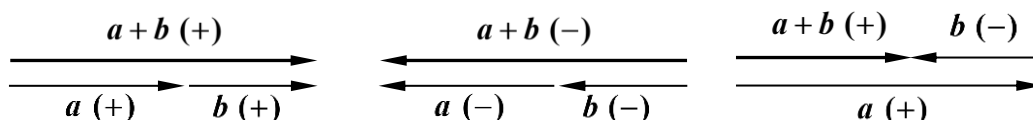
由於 $|ab| \geq ab \geq -|ab|$ ，故 $|a| + |b| \geq |a+b| \geq ||a| - |b||$

(2) 等號成立：

① 當 時， $|a| + |b| = |a+b|$ 。

② 當 時， $|a+b| = ||a| - |b||$ 。

【說明】



4. 絕對值方程式的幾何觀點

(1) 絕對值的幾何意義：

除了利用代數方式解絕對值方程式之外，由於 $|x-\alpha|$ 表示 x 與 α 在一維實數線上之距離，建議先從數線的距離觀點下手，尤其是方程式的絕對值過多時。

(2) 判定未知數的位置：

從距離觀點處理絕對值時，有些數值可以讓我們提前判定未知數的大概區間。

① $|x-1| + |x-5| = 8$



② $|x| + |x-1| + |x-5| = 20$



5. 偏差絕對值函數

(1) 偏差絕對值函數：

$f(x) = |x-\alpha_1| + |x-\alpha_2| + \cdots + |x-\alpha_n|$ ($\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 為實數) 稱為偏差絕對值函數。

(2) 中位數法則：

已知 $f(x) = |x-\alpha_1| + |x-\alpha_2| + \cdots + |x-\alpha_{n-1}| + |x-\alpha_n|$ 且 $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots \leq \alpha_{n-1} \leq \alpha_n$ ，

則 $f(x)$ 在 $x = Me$ 時有最小值，其中 Me 為 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$ 之中位數。

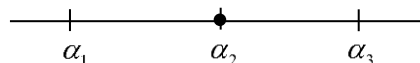
① 奇數個絕對值的中位數法則：

$f(x) = |x - \alpha_1| + |x - \alpha_2| + |x - \alpha_3|$ ($\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3$) 在 $x = \alpha_2$ (中位數) 時有 $f(x)$ 的最小值 $f(\alpha_2)$ 。

【說明】

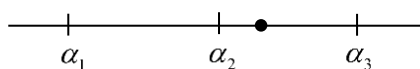
當 $x = \alpha_2$ 時，

$$f(\alpha_2) =$$



當 $x = p \neq \alpha_2$ 時，

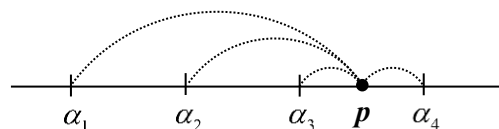
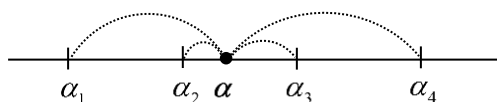
$$f(p) =$$



② 偶數個絕對值的中位數法則：

$f(x) = |x - \alpha_1| + |x - \alpha_2| + |x - \alpha_3| + |x - \alpha_4|$ ($\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3 \leq \alpha_4$) 對於區間 $[\alpha_2, \alpha_3]$ 內的任何 α 值，都有 $f(x)$ 的最小值 $f(\alpha)$ 。

【說明】



當 $x = \alpha$ 時 ($\alpha_2 \leq \alpha \leq \alpha_3$)，

$$f(\alpha) = |\alpha - \alpha_1| + |\alpha - \alpha_2| + |\alpha - \alpha_3| + |\alpha - \alpha_4| = |\alpha_4 - \alpha_1| + |\alpha_3 - \alpha_2|$$

當 $x = p$ 時 (p 不在區間 $[\alpha_2, \alpha_3]$ 內)，

$$f(p) = |p - \alpha_1| + |p - \alpha_2| + |p - \alpha_3| + |p - \alpha_4| \geq |\alpha_4 - \alpha_1| + |\alpha_3 - \alpha_2| = f(\alpha) \quad \text{【三角不等式】}$$

【說例 1】

$$f(x) = |x - 1| + |x - 3| + |x - 8| \text{ 有 } \min f(x) = \underline{\hspace{2cm}}, \text{ 此時 } x = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【說例 2】

$$f(x) = |x - 1| + |x - 2| + |x - 3| + |x - 5| \text{ 有 } \min f(x) = \underline{\hspace{2cm}}, \text{ 此時 } \underline{\hspace{2cm}}.$$

6. 絕對值方程式的處理原則

(1) 絕對值問題常用方法：

- | | |
|------------------------|------------------------|
| ① <input type="text"/> | ② <input type="text"/> |
| ③ <input type="text"/> | ④ <input type="text"/> |

(2) 題型分類：

題型	$ A \leq B $
說例	$ x-1 \leq 3x-4 $
處理原則	[法一] 兩側直接平方 [法二] 討論 $x < 1$, $1 \leq x < \frac{4}{3}$, $x \geq \frac{4}{3}$

題型	$ A \geq B$ $ A \leq B$
說例	$ x+1 \geq 2x+3$
處理原則	討論 $x < -1$, $x \geq -1$

題型	$ A + B \leq C $ $ A + B \geq C $
說例	$ x-1 + x-2 \leq 2x-3 $
處理原則	[法一] 看成 $x-1 + x-2 \leq (x-1) + (x-2)$ 再由三角不等式 $x-1 + x-2 \geq (x-1) + (x-2)$ 處理之 [法二] 討論 $x < 1$, $1 \leq x < \frac{3}{2}$, $\frac{3}{2} \leq x < 2$, $x \geq 2$

題型	多絕對值
說例	$ x-1 + x-2 + x-5 =20$
處理原則	[法一] 看成 x 分別到 1, 2, 5 的距離總和為 20， 必在 1 的左側或 5 的右側 [法二] 討論 $x < 1$, $1 \leq x < 2$, $2 \leq x < 5$, $x \geq 5$

型一 絕對值方程式

例 1

各校段考必考題型

$|ax+1| \leq b$ 之解為 $-1 \leq x \leq 5$ ，求 a, b 之值。

解 【常見錯誤】

$$\begin{aligned} |ax+1| \leq b &\Rightarrow -b \leq ax+1 \leq b \Rightarrow -b-1 \leq ax \leq b-1 \\ &\Rightarrow \frac{-b-1}{a} \leq x \leq \frac{b-1}{a} \quad \text{[錯在哪?]} \end{aligned}$$

【正解】

VEIA



例 2 平方使用時機

試解不等式 $|2x-1| \geq |x-5|$ 。

解

▣ [衛道中學]

若實數 a 滿足 $1 < |a-1| \leq 2$ 且 $|x-a| = 3|x-9|$ ，則實數 x 的最大值為_____。

答：14

例 3

試解不等式 $3 < |2x - 1| < 5$ 。

解 【法一】

$$1^\circ \quad \text{Case 1} \quad \begin{cases} 2x - 1 \geq 0 \\ 3 < 2x - 1 < 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 2 < x < 3 \end{cases}$$

$$\text{Case 2} \quad \begin{cases} 2x - 1 < 0 \\ 3 < -(2x - 1) < 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

2° 由以上可知所求為

【法二】

TFNJ



例 4 多重絕對值

請問滿足絕對值不等式 $||x - 1| - 4| \leq 3$ 的實數 x 解之範圍。

答

▣ 【台中一中】

試問滿足 $||x - 1| - 3| \leq 4$ 的整數 x 值共有_____個。

答：13

例 5

已知方程式 $\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{x^2-2x+1}=6$ ，求實數 x 。

解 將原方程式改寫為：

從距離大小與數線上的位置，其實可以看得出 x 在 1 的左側或在 2 的右側；
若是其他方程式數據，可能較難觀察 x 大概的位置，所以我們以通則來分析：

AGHB



例 6

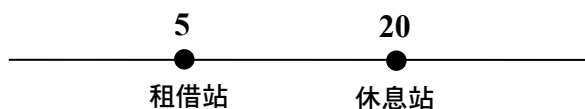
已知方程式 $|x-1|+|x-2|+|x-6|=15$ ，求實數 x 。

解

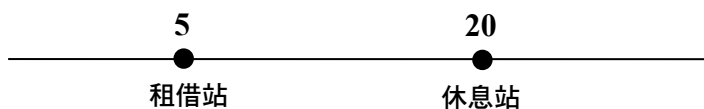
例 7

各校重要考題

如下圖所示，在一條東西向的筆直景觀道路上，有一家電動機車租借站與休息站，分別位於道路里程 5 與 20 的位置。遊客租借電動機車騎乘時，偶爾會在路上耗盡電力而需要道路救援。由於人力與成本的考量，若「救援位置與租借站的距離」再加上「救援位置與休息站距離的 1.5 倍」不大於 30 時，可以免費服務，則可以免費救援的里程區間為_____。



解



▣ 【台中女中】

解不等式 $|x+2| - |x-1| < x+1$ 。

答： $x > 2$ 或 $-4 < x < 0$

型二**偏差絕對值函數****例 8**

係數是 1 要如何處理?

求使得方程式 $|x-1|+|x-2|+|x-5|=k$ 有實數 x 解的 k 範圍。**解****例 9**

係數是 1 要如何處理?

求解不等式 $|x-1|+|x-5|>3$ 。**解****例 10**

係數不是 1 要如何處理?

求 $f(x)=3|x-1|+|x-2|+2|x-4|+|x-5|$ 的最小值與對應的 x 值。**解****▣ [挑戰題]**求 $f(x)=|x-1|+\frac{1}{2}|x-2|+\frac{1}{3}|x+3|$ 的最小值與對應的 x 值。答： $\frac{11}{6}$ ，此時 $x=1$

下列各方程式中，請選出有實數解的選項：

(1) $|x| + |x-5| = 1$

(2) $|x| + |x-5| = 6$

(3) $|x| - |x-5| = 1$

(4) $|x| - |x-5| = 6$

(5) $|x| - |x-5| = -1$ 。

解

$|x| + |x-5|$ 可以表示一維數線上，「 x 至原點的距離」與「 x 至 5 的距離」之和

同理， $|x| - |x-5|$ 可以表示一維數線上，「 x 至原點的距離」與「 x 至 5 的距離」之差

由於 $|x| + |x-5|$ 的最小值為 5，故方程式 $|x| + |x-5| = k$ 有實數 x 解的條件是_____。

接下來，我們來討論方程式 $|x| - |x-5| = k$ 有實數 x 解的條件：

圖 示			
$a - b$			

由於 $|x| - |x-5| = k$ 的最小值為 -5 ，最大值為 5 ，

故方程式 $|x| - |x-5| = k$ 有實數 x 解的條件是_____。

故選_____。

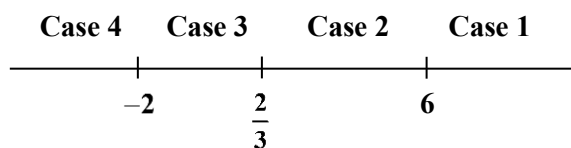
型三 三角不等式

例 12

試解 $|x-6|+|2x+4|\leq|3x-2|$ 之 x 的實數範圍。

解 【法一】討論

可以把實數區間分成四個區域：



Case 1 當 $x \geq 6$ 時, $\begin{cases} x \geq 6 \\ (x-6) + (2x+4) \leq (3x-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 6 \\ x \text{ 為任意實數} \end{cases} \Rightarrow x \geq 6$

Case 2 當 $\frac{2}{3} \leq x < 6$ 時, $\begin{cases} \frac{2}{3} \leq x < 6 \\ (6-x) + (2x+4) \leq (3x-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{3} \leq x < 6 \\ x \geq 6 \end{cases} \Rightarrow x \text{ 無解}$

Case 3 當 $-2 \leq x < \frac{2}{3}$ 時, $\begin{cases} -2 \leq x < \frac{2}{3} \\ (6-x) + (2x+4) \leq (2-3x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 \leq x < \frac{2}{3} \\ x \leq -2 \end{cases} \Rightarrow x = -2$

Case 4 當 $x < -2$ 時, $\begin{cases} x < -2 \\ (6-x) + (-2x-4) \leq (2-3x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -2 \\ x \text{ 為任意實數} \end{cases} \Rightarrow x < -2$

由以上可知實數 x 範圍為 $x \leq -2$ 或 $x \geq 6$

【法二】三角不等式

$$\because | \quad | + | \quad | \geq | \quad |, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

但題給 $| \quad | + | \quad | \leq | \quad |$

$\therefore$

▣ [挑戰題]

試解 $|2x-6|+|x-2|\leq|x-4|$ 之 x 的實數範圍。

答： $2\leq x\leq 3$

Topic 1-3

指 數