

主題 10 利率問題



1. 利率概念

(1) 單利與複利：

若將本金 A 元存入銀行，期利率為 r ，經 n 期過後：

- ① 如以單利計算， n 期過後可得本利和 $A(1+nr)$ 元。
- ② 如以複利計算，且每期複利一次， n 期過後可得本利和 $A(1+r)^n$ 元。

【說例 1】

若將本金 A 元存入銀行，年利率為 12%，每年複利一次，5 年過後可得本利和為_____元。

【說例 2】

若將本金 A 元存入銀行，年利率為 12%。以單利計算，5 年過後可得本利和為_____元。

(2) 利率的分割：

若將本金 A 元存入銀行，年利率為 12%，每期以複利計息， n 年過後：

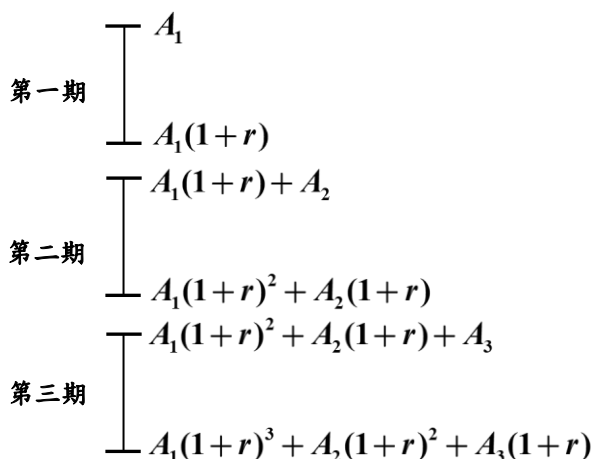
- ① 若每年為一期，則 n 年過後可得本利和_____元。
- ② 若每半年為一期，則 n 年過後可得本利和_____元。
- ③ 若每季為一期，則 n 年過後可得本利和_____元。

2. 存款與貸款

(1) 定期存款：

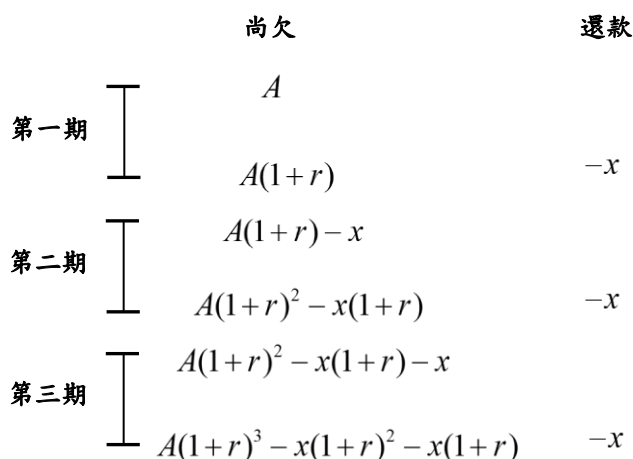
若銀行存款每期複利一次，期利率為 r 。且假設在第 1, 2, 3, $\dots$, $n-1$, n 期初分別存入本金 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-1}, A_n$ 元，則 n 期過後，本利和為：

$$\boxed{A_1(1+r)^n + A_2(1+r)^{n-1} + \dots + A_n(1+r)} \text{ 元。 [視為每筆金額分開複利]}$$



(2) 分期還款：

我們先考慮一個情形：小立向銀行貸款 A 元，約定分 3 期還清，且每期固定還款 x 元。假設銀行定期利率為 r ，且每期複利一次。



在第三期結束還清款項可得 $A(1+r)^3 - x(1+r)^2 - x(1+r) - x = 0$

即 $A(1+r)^3 = x(1+r)^2 + x(1+r) + x$.

我們可以推廣至：

若某人向銀行借款 A 元，約定分 n 期還清，每期固定還 x 元。假設銀行定期利率為 r ，每期複利一次，則：

$$A(1+r)^n = x(1+r)^{n-1} + x(1+r)^{n-2} + x(1+r)^{n-3} + \cdots + x(1+r) + x$$

[視為借款本利和等於還款本利和]

【說明】

想像自己在甲戶頭存了一筆錢 A ，

n 期之後領回本利和。

$$A(1+r)^n$$

想像自己在乙戶頭每一期期初都存了一筆錢 x ，

n 期之後領回本利和。

必須和甲戶頭的本利和相等，才算還款追平。

$$x(1+r)^{n-1}$$

$$x(1+r)^{n-2}$$

$$x(1+r)$$

$$x$$

小華準備向銀行貸款 3 百萬元當做創業基金，其年利率為 3%，約定三年期滿一次還清貸款的本利和。銀行貸款一般以複利（每年複利一次）計息還款，但給小華創業優惠改以單利計息還款。試問在此優惠下，小華在三年期滿還款時可以比一般複利計息少繳_____元。

解

▣ [興大附中]

錢老闆急用錢，打算向銀行借 10 萬元並在三個月後還清，他向銀行詢問利息的算法，銀行提出四個方案如下：

甲：月利率 2%，每個月複利一次

乙：月利率 2%，每半個月複利一次

丙：第一個月利率為 1%，第二個月為 2%，第三個月為 3%，每個月複利計息

丁：第一個月利率為 3%，第二個月為 2%，第三個月為 1%，每個月複利計息

這四個方案以哪一個對錢老闆**最不利**，及所攤還的本利和為最多

(1) 甲方案 (2) 乙方案 (3) 丙方案 (4) 丁方案 (5) 四個方案的本利和都一樣

答：(2)

▣ [高雄中學]

宇朋向銀行貸款 2 百萬當作創業基金，其年利率為 $r\%$ ，約定二年期滿一次還清貸款的本利和。銀行貸款一般以複利（每年複利一次）計息還款，但給宇朋創業優惠改以單利計息還款。試問在此優惠下，宇朋在二年期滿還款時可以比一般複利計息少繳 1800 元，試求 $r\% =$ _____ %。

答：3

例 2 | 定期存款的本利和

李君到郵局開了一個零存整付的戶頭，約定於每年年初存入 10 萬元，以年利率 10% 複利計算，試問滿 10 年後，李君所得的本利和共有多少錢？($1.1^{10} = 2.59$)

解



▣ [建國中學]

小建為了置產，打算從今年開始參加銀行零存整付的優惠存款專案，其辦法規定：每年為一期，每一期的第一天存款 10 萬元，按年利息 1% 計算，每年複利計息一次，十年期滿。若期滿時小建總共可領回 x 元，請選出 x 的範圍。

(已知 $1.01^9 \approx 1.0937$, $1.01^{10} \approx 1.1046$, $1.01^{11} \approx 1.1156$)

- (A) $1051500 \leq x < 1053500$ (B) $1053500 \leq x < 1055500$ (C) $1055500 \leq x < 1057500$
(D) $1057500 \leq x < 1059500$ (E) $1059500 \leq x < 1061500$ 。

答：(C)

▣ [嘉義高中]

阿文剛出社會，決定每個月存錢做為買房基金，規劃如下：每個月初存 2 萬元，存 20 年。現銀行推出的利率優惠為月利率為 0.1%，每個月複利計息。若 20 年間此利率不變，20 年後期滿阿文的本利和為_____萬元。(無條件捨去至萬元)，請利用近似值 $1.001^{241} = 1.272$ 計算。

答：542

▣ [文華高中]

小文於每年年初固定存入 10 萬元，投入每年年利率 1% 的定存，而小華也於每年年初固定投入 10 萬元，但他找到每年年利率 2% 的銀行來參加定存，假設兩人都在前述條件不變的情況下持續進行，試問 20 年後小華的本利和比小文的本利和多百分之_____。(請四捨五入到整數位) ($1.01^{20} \approx 1.22$, $1.02^{20} \approx 1.49$)

答：12

例 3 | 分期還款

菲菲打算在明年 1 月初向銀行貸款 500 萬元買房子，該銀行採用「本息平均攤還法」還款，其計算方式為：每月複利計息一次，將貸款期間內全部貸款之本金與利息平均分攤於每一期中償付，使每期繳納相同的金額；且銀行願意貸款給民眾的房貸金額(本金)是以每月的房貸支出(即每月所還之支利和)不超過月收入的 $\frac{1}{3}$ 為原則。若該銀行貸款的年利率為 2.4%，每月複利計息一次，每月月底還一次本息，25 年後還清，則菲菲的月收入至少要_____萬元才可貸款。
(答案請取整數至萬元，已知 $1.002^{25} \approx 1.05$, $1.002^{300} \approx 1.82$ ；月利率 = 年利率 $\div 12$)

解

▣ [興大附中]

小延年初向銀行借款 10000 元，每年計算複利一次，預定兩年還清。若小延第一年年底還了 5200 元，第二年年底還了 5253 元後還清，則此次借款的年利率為_____%。

答：3

▣ [衛道中學]

阿甘向銀行借錢 12000 元，約定以年利率 $a\%$ 計息(以複利計算)，一年後還 5800 元，再一年後又還 9200 元，恰將本利還清，則 $a =$ _____。

答：15