

主題 5 級數總和與數列一般項

DCAZ



1. 由級數總和推出一般項

(1) 一般項：

由級數 $\begin{cases} S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n \\ S_{n-1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} \end{cases}$ 可推得數列一般項表達法：

$$a_n = \left\{ \begin{array}{l} \phantom{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n} \\ \phantom{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n} \end{array} \right. .$$

(2) 重要步驟：

- ① 給定 S_n 必先獨立處理首項 a_1 。
- ② 求解一般項 a_n ，最後必須檢查 $n=1$ 及 $n \geq 2$ 是否可合併。

2. 由特殊級數總和推出一般項

(1) 由連乘積總和推出一般項：

$$\text{若 } S_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_{n-1} \cdot a_n, \text{ 則 } \begin{cases} S_1 = a_1 \\ a_n = \frac{S_n}{S_{n-1}} \quad (n \geq 2) \end{cases} .$$

(2) 由平方總和推出一般項：

$$\text{若 } S_n = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{n-1}^2 + a_n^2, \text{ 則 } \begin{cases} S_1 = a_1^2 \\ a_n^2 = S_n - S_{n-1} \quad (n \geq 2) \end{cases} .$$

(3) 由加權總和推出一般項：

$$\text{若 } S_n = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n = n(n+1)(n+2), \text{ 則 } \begin{cases} S_1 = a_1 \\ na_n = S_n - S_{n-1} \quad (n \geq 2) \end{cases} .$$

例 1

數列 $\{a_n\}$ 前 n 項總和為 $S_n = n^2 + 3n + 1$ ，求一般項 a_n 。

解

$$1^\circ \quad a_1 = S_1 = 5$$

$$2^\circ \quad a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= (n^2 + 3n + 1) - [(n-1)^2 + 3(n-1) + 1] = 2n + 2 \quad (n \geq \quad)$$

$$3^\circ \quad \text{由 } 1^\circ 2^\circ \text{ 可知 } a_n = \begin{cases} \quad, n=1 \\ \quad, n \geq 2 \end{cases}$$

SKPC



例 2

數列 $\{a_n\}$ 前 n 項總和為 $S_n = n^2 + 3n$ ，求一般項 a_n 。

解

$$1^\circ \quad a_1 = S_1 = 4$$

$$2^\circ \quad a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= (n^2 + 3n) - [(n-1)^2 + 3(n-1)] = 2n + 2 \quad (n \geq \quad)$$

$$3^\circ \quad \text{由 } 1^\circ 2^\circ \text{ 可知 } a_n = \begin{cases} \quad, n=1 \\ \quad, n \geq 2 \end{cases}$$

NNFE



▣ [興大附中]

設數列 $\langle a_n \rangle$ 的前 n 項總和為 $n^2 + 1$ ，其中 n 為正整數，求 $a_1 + a_{2021}$ 之值。

(1) 4040

(2) 4041

(3) 4042

(4) 4043

(5) 以上皆非。

答：(4)

例 3

設 $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n = n(n+1)(n+2)$ ，試求 a_n 。

解 1° $n=1$ 時，代入得 $a_1 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

$$2^\circ \quad a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + (n-1)a_{n-1} + na_n = n(n+1)(n+2)$$

$$-) \quad a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + (n-1)a_{n-1} = (n-1)n(n+1)$$

$$na_n = 3n(n+1)$$

$$\therefore a_n = 3(n+1), \quad \forall n \geq 2$$

3° 由 1° 2° 可知 $a_n = 3(n+1), \forall n \in \mathbb{N}$

XVWB



▣ [武陵高中]

設數列 $\langle a_n \rangle$ 中，對於所有的正整數 n ， $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n = 3^{n+1} \cdot (n^2 + n)$ ，則此數列的一般項通式 $a_n = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答： $3^n \cdot (2n+4)$