



1. 等差數列

(1) 定義：

在數列中每相鄰之兩項之間，後一項減去前一項的差都相等，就稱此數列為等差數列，亦稱為_____數列，而此相等的差就稱為此數列之公差（一般以 d 表示公差）。

(2) 一般項：

若等差數列 $\langle a_n \rangle$ 的首項是 a_1 ，公差為 d ，由等差數列的定義及規則：

$$\begin{array}{ccccccc} a_1 & & a_2 & & a_3 & & a_4 & \cdots & a_{n-1} & & a_n \\ & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & & & \swarrow & \\ & +d & & +d & & +d & & & & +d & \end{array}$$

則等差數列的一般項可表為 $a_n =$ _____。

(3) 遞迴式：

公差為 d 的等差數列 $\langle a_n \rangle$ 之遞迴表達為 $a_n =$ _____。

(4) 幾何意義：

若 a_1 為實數且公差 d 為非零實數，則可視 a_n 為 n 的一次函數，而 (n, a_n) 恆為直線 $y = a_1 + (x - 1)d$ 上的點。

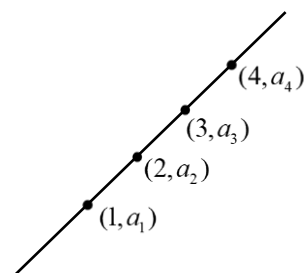
【說明】

若等差數列 $\langle a_n \rangle$ 的一般項為 $a_n = 3n - 1$ ，則

(n, a_n) 可視為平面上直線 _____ 的點

且直線斜率為數列公差 3。故可得 $(1, a_1)$,

$(2, a_2)$, $(3, a_3)$, $\cdots$ 共線。



【說例 1】

已知等差數列 $\langle a_n \rangle$: 4, 7, 10, $\dots$, 則 $a_n = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【說例 2】

已知等差數列 $\langle b_n \rangle$: 2, 7, 12, $\dots$, 則 $b_n = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【說例 3】

已知等差數列 $\langle c_n \rangle$: 100, 93, 86, $\dots$, 則 $c_n = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

2. 等差中項

(1) 意義：

若數列 a, b, c 成等差，則稱 b 為等差中項或算術中項，其中 。

(2) 性質：

① 若數列 $\langle a_n \rangle$ 成等差，則有奇數項等差中項性質，舉例來說：

$$a_1 + a_7 = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} 。$$

② 若數列 $\langle a_n \rangle$ 成等差，則有偶數項等差中項性質，舉例來說：

$$a_1 + a_6 = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} 。$$

3. 等差級數

(1) 等差級數定義：

若數列 $\langle a_n \rangle$ 為一等差數列，將數列各項以加號連結，稱此為等差級數。

(2) 等差級數總和公式：

公差為 d 的等差數列 $\langle a_n \rangle$ 前 n 項的級數總和為：

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \span style="border: 1px solid black; display: inline-block; width: 100px; height: 50px; vertical-align: middle;"> = 。$$

【說明】

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_1$$

將二式相加得

$$\begin{aligned} 2S_n &= (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \cdots + (a_n + a_1) \\ &= (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \cdots + (a_1 + a_n) \quad [\text{中項性質}] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2S_n = n(a_1 + a_n) \Rightarrow S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

【說例 1】

若數列 $\langle a_n \rangle$ 成等差，則 $\sum_{k=1}^7 a_k = \underline{\hspace{2cm}}$ ，即 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 7a_4$ 。

【說例 2】

若數列 $\langle a_n \rangle$ 成等差，則 $a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

型一 已知等差數列兩項求第三項

例 1

設 $\langle a_n \rangle$ 為一等差數列，試由以下條件 (已知其中兩項) 進而求數列的另一項。

- (1) 若 $a_5 = 6, a_{10} = 31$ ，求 a_{17} 。
- (2) 若 $a_m = n, a_n = m$ ，其中 $m \neq n$ ，求 a_{m+n} 。 $(m, n \in \mathbb{N})$
- (3) 若在 $-10 \sim 20$ 之間插入 13 個數，使成等差數列，求插入的第 6 項。

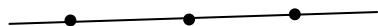
解 (1) 【法一】

$$\begin{cases} a_5 = a_1 + 4d = 6 \\ a_{10} = a_1 + 9d = 31 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \\ d = \end{cases} \Rightarrow a_{17} =$$

USWX



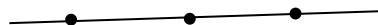
【法二】



(2)



(3)



型二 等差數列的中項性質

例 2 已知中項比求總和比

若兩個等差數列 $\{a_n\}$ 與 $\{b_n\}$ ，第 n 項 之比為 $(2n+3):(6n+4)$ ，求前 9 項和之比。

解
$$\frac{S_9}{S'_9} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9}{b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6 + b_7 + b_8 + b_9} =$$

ZBDZ



例 3 已知總和比求中項比

若兩個等差數列 $\{a_n\}$ 與 $\{b_n\}$ ，前 n 項和 之比為 $(7n+2):(n+3)$ ，求其第 3 項之比。

解

NDQP



▣ [北一女中]

二等差數列之前 n 項和的比為 $(4n+1):(7n-2)$ ，則其第 6 項的比為

(1) $5:8$ (2) $4:7$ (3) $1:2$ (4) $5:7$ (5) $3:5$ 。

答：(5)

▣ [建國中學]

已知兩等差數列 $\langle a_k \rangle, \langle b_k \rangle$ ，其前 n 項的和分別為 A_n 與 B_n ，若對於所有的自然數 n

而言， $\frac{A_n}{B_n} = \frac{2n}{3n-1}$ ，則 $\frac{a_3}{b_3}$ 之值為_____。

答： $\frac{5}{7}$

▣ [興大附中]

假設在小巨蛋球館觀看籃球比賽，已知小立坐在紫色區的席位共有 20 排的座位，此區每一排都比前一排多 k 個座位。小立坐在第 10 排，他發現第 10 排與第 11 排共有 235 個座位。則此紫色區總共有多個座位？

答：2350

例 4

有一個項數為奇數項的等差數列 $\{a_n\}$ ，其數列中所有奇次項的總和為 310，偶次項的總和為 300，求 $\{a_n\}$ 的項數。

解

▣ [興大附中]

等差數列 $\{a_n\}$ 前 25 項的「奇數項之和」比「偶數項之和」多了 150，前 50 項的「偶數項之和」比「奇數項之和」多了 150，則此數列的首項為_____。

答：78

▣ [嘉義高中]

一等差數列共 16 項，和 304，且奇數項之和與偶數項之和的比為 9：10，則此等差數列的公差為_____。

答：2

▣ [台南一中]

一等差級數共有奇數項，其首項為 5，和為 493，偶數項之和與奇數項之和的比為 8：9，求此數列之公差為_____。

答：3

型三**等差數列的一般項與級數總和****例 5**

設一個等差數列 $\{a_n\}$ 的第 8 項是 18，第 20 項是 -174，試回答下列問題：

- (1) 求數列的首項 a_1 、公差 d 與一般項 a_n 。
- (2) 第 n 項開始為負，求 n 。
- (3) 求 S_n 之最大值。

解

JSXS



▣ [明道中學]

一等差數列 $\langle a_n \rangle$ ，若 $a_{10} = 23$, $a_{25} = -22$ ，求前 n 項總和之最大值為_____。

答：442

▣ [台中二中]

在103與297之間插入 n 項，使其成一等差數列，則此等差數列的總和為20000時， n 的值為_____。

答：98

▣ [武陵高中]

等差數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $a_{10} = 50$, $a_{20} = 20$ ，且對於任意正整數 n ， $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ 皆成立。
。假設 $S_n < 0$ 時， n 的最小值為 α ；若 S_n 有最大值時，此時 $n = \beta$ ，則數對 $(\alpha, \beta) =$
_____。

答：(53, 26)

例 6

假設有兩數列 $\langle a_n \rangle, \langle b_n \rangle$ ，其中 $a_n = 4n + 1, b_n = 3n + 2, n \in \mathbb{N}$ ，求共同項前 19 項的和。

解 1° $a_n = 4n + 1, \langle a_n \rangle : 5, 9, 13, 17, 21, \dots$

$b_n = 3n + 2, \langle b_n \rangle : 5, 8, 11, 14, 17, \dots$

2° 令共同項數列為 $\langle c_n \rangle$ ，其公差為 12，是原來兩公差之最小公倍數

$\therefore c_n =$

3°



▣ [武陵高中]

桃園市政府欲修築長 1500 公尺的椰林大道，在椰林大道右側從 9 公尺開始，每隔 11 公尺設置一盞綠竹筍路燈；左側從 6 公尺開始，每隔 8 公尺設置一盞白鷺鷥路燈，則在 1500 公尺的椰林大道上，共有_____盞路燈相對。

答：17