

② 三次函數 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 圖形之對稱中心為 $(\frac{-b}{3a}, f(\frac{-b}{3a}))$ 。又稱為三次函數圖形的反曲點 (inflection point)。

【說例】

$$\begin{aligned} y &= 2x^3 + 12x^2 + 7x + 2 = 2(x^3 + 6x^2) + 7x + 2 \\ &= 2(x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 2) + 7x + 2 = 2(x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 2 + 3 \cdot x \cdot 2^2 + 2^3) + 7x + 2 - 2 \cdot 3 \cdot x \cdot 2^2 - 2 \cdot 2^3 \\ &= 2(x+2)^3 - 17x - 14 = 2(x+2)^3 - 17(x+2) + 20 \end{aligned}$$

【說明 1】

$$\begin{aligned} y &= ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x^3 + \frac{b}{a}x^2) + cx + d \quad \text{[配立方]} \\ &= a[x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot \frac{b}{3a} + 3 \cdot x \cdot (\frac{b}{3a})^2 + (\frac{b}{3a})^3] - 3a \cdot x \cdot (\frac{b}{3a})^2 - a(\frac{b}{3a})^3 + cx + d \\ &= a(x + \frac{b}{3a})^3 + \underbrace{(c - \frac{b^2}{3a})x + (d - \frac{b^3}{27a^2})}_{\text{令 } px+D} \quad \text{[配立方過程會將 } x^2 \text{ 項納入完全立方]} \\ &= a(x + \frac{b}{3a})^3 + px + D = a(x + \frac{b}{3a})^3 + p(x + \frac{b}{3a}) - p(\frac{b}{3a}) + D \quad \text{[令 } \frac{-pb}{3a} + D = k] \\ &= a(x + \frac{b}{3a})^3 + p(x + \frac{b}{3a}) + k \end{aligned}$$

故可得 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 的對稱中心為 $(\frac{-b}{3a}, k) = (\frac{-b}{3a}, f(\frac{-b}{3a}))$

【說明 2】

	二次函數	三次函數
一般式	$y = ax^2 + bx + c$	$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$
標準式	$y = a(x - h)^2 + k$	$y = a(x - h)^3 + p(x - h) + k$
對稱軸或對稱中心	對稱軸 $x = \frac{-b}{2a}$	對稱中心 x 坐標 $x = \frac{-b}{3a}$
極值討論	只有最大值或只有最小值	沒有最大值且沒有最小值

【說明 3】

1° 對任意三次多項式 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 都可以 $x-h$ 做連續綜合除法：

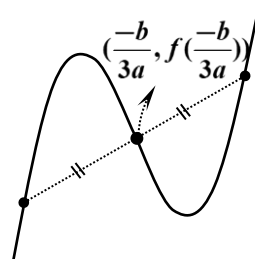
$$\text{故可得 } f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = a'(x-h)^3 + b'(x-h)^2 + c'(x-h) + d'$$

2° 比較 x^3 係數與 x^2 係數：
$$\begin{cases} a = a' \\ b = -3a'h + b' \end{cases}$$

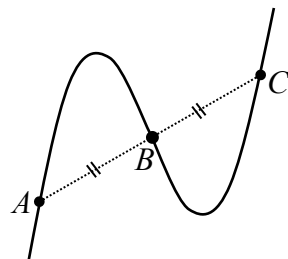
3° 令 $b' = 0$ 即取 $h = \frac{-b}{3a}$ 可得

$$f(x) = a'\left(x + \frac{b}{3a}\right)^3 + c'\left(x + \frac{b}{3a}\right) + d'$$

4° 由標準式格式可知對稱中心為 $\left(\frac{-b}{3a}, d'\right) = \left(\frac{-b}{3a}, f\left(\frac{-b}{3a}\right)\right)$



③ 若直線 L 與三次函數 $y = f(x)$ 圖形交點依次為 A, B, C 且 $\overline{AB} = \overline{BC}$ ，則 B 必為 $y = f(x)$ 之對稱中心。



④ 若三次函數 $f(x)$ 的對稱中心為 (h, k) ，則函數必滿足 $\frac{f(h-x) + f(h+x)}{2} = k$ 。

【說例】

若直線 L 與三次函數 $y = f(x)$ 圖形交點依次為 $A, B(1, 3), C$ 且 $\overline{AB} = \overline{BC}$ ，則：

① 可設 $f(x) =$ 。

② $f(x)$ 滿足 ，

亦可表為 $f(1-x) + f(1+x) = 6$ 。

③ $f(x)$ 滿足 。

