

2. 二次函數圖形與直線的交點

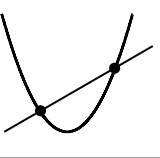
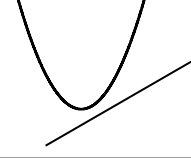
(1) 判斷交點：

判斷平面上的二次函數圖形 $\Gamma: y = ax^2 + bx + c$ 和直線 $L: y = mx + k$ 有無交點，可由

方程組 $\begin{cases} \Gamma: y = ax^2 + bx + c \\ L: y = mx + k \end{cases}$ 合併成 $Ax^2 + Bx + C = 0$ ，接著再求方程式的實數解個數。

(2) 交點個數：

在 $Ax^2 + Bx + C = 0$ 中，令 $D = B^2 - 4AC$ ，由 D 可判斷交點數。

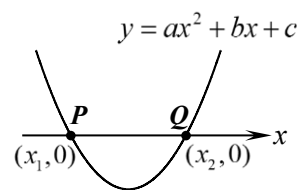
圖形			
幾何意義	兩圖形交兩點	兩圖形切一點	兩圖形無交點
條件	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$

3. 弦長公式 [非課綱範圍公式，請自行參考]

(1) 弦在 x 軸上：

若二次函數圖形 $y = ax^2 + bx + c$ 與 x 軸交於

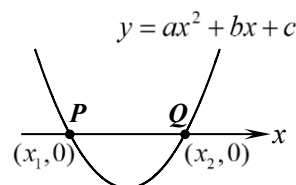
$P(x_1, 0)$, $Q(x_2, 0)$ 兩點，則 $\overline{PQ} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|a|}$ 。



【說明】

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow ax^2 + bx + c = 0 \quad [\text{兩根 } x_1, x_2]$$

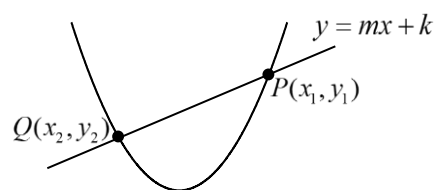
$$\begin{aligned} \overline{PQ} &= |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{-b}{a}\right)^2 - 4\left(\frac{c}{a}\right)} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|a|} \end{aligned}$$



(2) 弦在斜直線上：

若任意二次曲線 $\Gamma: f(x, y) = 0$ 與直線 $L: y = mx + k$ 交於 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ 兩點，若將兩方程式併成 $Ax^2 + Bx + C = 0$ 且兩根為 x_1, x_2 ，則弦長

$$\overline{PQ} = \boxed{\sqrt{(1+m^2)[(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2]}} \quad .$$



【說明】

$$\begin{aligned} \overline{PQ} &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + m^2(x_1 - x_2)^2} \\ &= \sqrt{(1+m^2)(x_1 - x_2)^2} \\ &= \sqrt{(1+m^2)[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2]} \end{aligned}$$

