

例 11

已知多項式 $f(x) = x^n(x^2 + ax + b)$ 除以 $(x-2)^2$ 的餘式為 $2^n(x-2)$ 。其中為 n 為正整數。試求數對 (a, b) 。

解

$$1^\circ \quad \text{設 } f(x) = x^n(x^2 + ax + b) = (x-2)^2 Q(x) + 2^n(x-2)$$

$$\text{可得 } (x-2) \mid f(x) \quad \therefore f(2) = 2^n(4 + 2a + b) = 0 + 0 \Rightarrow b = -4 - 2a$$

$$2^\circ \quad f(x) = x^n(x^2 + ax - 4 - 2a) = (x-2)^2 Q(x) + 2^n(x-2) \quad [b = -4 - 2a]$$

$$\Rightarrow x^n(x-2)(x+a+2) = (x-2)^2 Q(x) + 2^n(x-2)$$

$$\Rightarrow x^n(x+a+2) = (x-2)Q(x) + 2^n \dots\dots\dots \textcircled{1} \quad [\text{同除以 } x-2]$$

$$3^\circ \quad x=2 \text{ 代入 } \textcircled{1} \text{ 得 } 2^n(a+4) = 0 + 2^n \Rightarrow a = -3$$

$$\text{故 } (a, b) = (-3, 2)$$