

② 除式已知假設法：

$$f(x) = \boxed{} \quad (\text{除以 } x-2 \text{ 餘 } 7)$$

$$f(x) = \boxed{} \quad (\text{除以 } x^2 + x + 1 \text{ 餘 } x + 5)$$

③ 同餘假設法：

$$f(x) = \boxed{} \quad (\text{除以 } x-1, x-2, x-3 \text{ 皆餘 } 4)$$

$$f(x) = \boxed{} \quad (\text{除以 } x-1, x-2 \text{ 皆餘 } 3)$$

④ 牛頓 (Newton) 插值階梯假設法：

$f(x) =$

[illegible]

(除以 $x-1$, $x-2$, $x-3$ 分別餘 $4, 7, 8$, 即 $f(1)=4$, $f(2)=7$, $f(3)=8$)

2. 多項式餘式求法

(1) 同餘化簡迭代法：

① 同餘符號：[自行參考]

整數 12 除以 5 餘 2，整數 27 除以 5 餘 2，我們可以說這兩個除法同餘。

表示為 $12 \equiv 27 \pmod{5}$ ；同理，若多項式 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 的餘式為 $r(x)$ ，

多項式 $h(x)$ 除以 $g(x)$ 的餘式為 $r(x)$ ，可以表為 $f(x) \equiv h(x) \pmod{g(x)}$ 。

② 餘式化簡迭代法：[通常用於 $f(x)$ 已知時]

Step 1 可令除式 $g(x)$ 為 0，而將所得之關係式代入 $f(x)$ 中化簡。

Step 2 化簡時，若所得各項中，次數小於 $\deg g(x)$ 者，則保留；

次數大於 $\deg g(x)$ 者，則利用所得之關係式繼續降次化簡。

Step 3 直到每一項之次數均小於 $\deg g(x)$ 時，所得即餘式 $r(x)$ 。

【說例】

欲求「多項式 $f(x) = (x^2 + 2x + 3)^2$ 除以 $g(x) = x^2 + x + 1$ 的餘式」處理方式如下：

$$\begin{aligned} f(x) &\equiv (\quad)^2 \quad [\text{拆出除式 } x^2 + x + 1 \text{ 即可消去除式}] \\ &\equiv \quad \quad \quad [\text{由於次數不低於 } x^2 + x + 1, \text{ 故繼續消去}] \\ &\equiv \quad \quad \quad [\text{次數小於 } x^2 + x + 1, \text{ 故為餘式}] \end{aligned}$$

(2) 除式為組合式： [通常此種題型的被除式皆是未知]

給定若干個多項式 $f(x)$ 的除法表現，而新除式為組合式，則餘式可利用階梯假設法完成。

【說例 1】

多項式 $f(x)$ 除以 $x-1$ 餘 7； $f(x)$ 除以 $x+2$ 餘 3，則可設：

$$f(x) = (x-1)(x+2)Q(x) + \boxed{a(x-1)+7}$$

$$\text{或 } f(x) = (x-1)(x+2)Q(x) + \boxed{a(x+2)+3}。$$

【說例 2】

多項式 $f(x)$ 除以 $x-1$ 餘 5； $f(x)$ 除以 $x^2 + 3x + 1$ 餘 $2x + 3$ ，則可設：

$$f(x) = (x-1)(x^2 + 3x + 1)Q(x) + \boxed{(x-1)(ax+b)+5}$$

$$\text{或 } f(x) = (x-1)(x^2 + 3x + 1)Q(x) + \boxed{a(x^2 + 3x + 1) + 2x + 3}。$$