

主題 7 多項式恆等定理

1. 多項式的恆等

(1) 多項式相等：

- ① 兩多項式 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, $g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ 相等的充要條件為次數相等及對應係數相等。
- ② 若多項式 $f(x) = g(x)$ ，則對任何數值 α 而言， $f(\alpha) = g(\alpha)$ 恆成立。

(2) 多項式恆等定理：

設 $f(x), g(x)$ 均為次數不大於 n 的多項式，即 $\deg f(x) \leq n$, $\deg g(x) \leq n$ ，若有 $n+1$ 個相異數 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}$ 均使得 $f(\alpha_i) = g(\alpha_i)$ ，則 $f(x), g(x)$ 為同義多項式。可表為 $f(x) \equiv g(x)$ 。

【說明】

要確定 $f(x) = ax + b$ 是否等於 $g(x) = px + q$ ，至少需要兩組函數值，比方說， $f(1) = g(1) = 5$, $f(3) = g(3) = 7$ ，則 $f(x)$ 與 $g(x)$ 必為相同多項式。幾何上來說，即兩個相異點決定唯一直線。

同理，要確定 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 是否等於 $g(x) = px^2 + qx + r$ ，至少需要三組函數值，比方說， $f(1) = g(1)$, $f(-2) = g(-2)$, $f(4) = g(4)$ ，則 $f(x)$ 與 $g(x)$ 必為相同多項式。

【說例 1】

若多項式 $f(x), g(x)$ 均不大於 2 次，且 $f(1) = g(1)$, $f(-2) = g(-2)$, $f(4) = g(4)$ ，則 $f(x), g(x)$ 為同義多項式。

【說例 2】

若多項式 $f(x)$ 不大於 2 次，且 $f(1) = f(3) = f(5) = 7$ ，則 $f(x) \equiv 7$ 。

【說例 3】

設 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ，若 $f(1) = f(\sqrt{2}) = f(\pi) = 0$ ，則 $f(x) \equiv 0$ 。

2. 零多項式定理 [大學代數學課程 自行參考]

(1) 零多項式定理：

設 $f(x)$ 為不大於 n 次的多項式，若 $f(\alpha_1) = f(\alpha_2) = \cdots = f(\alpha_{n+1}) = 0$ ，且 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n+1}$ 兩兩互異，則 $f(x)$ 必為零多項式。

【說明】

設 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$ 為一個多項式，若有 $n+1$ 個相異的 x 值，代入 $f(x)$ 均使 $f(x) = 0$ ，則 $f(x) \equiv 0$ 。

【證明】

1° $\because f(\alpha_1) = f(\alpha_2) = f(\alpha_3) = \cdots = f(\alpha_n) = 0$ ，其中 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n$ 互異

可令 $f(x) = A(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_{n-1})(x - \alpha_n)$

2° 又 $f(\alpha_{n+1}) = 0$ ，其中 α_{n+1} 異於 $\alpha_i, \forall i \in \{1, 2, 3, \cdots, n-1, n\}$

$\Rightarrow f(\alpha_{n+1}) = A(\alpha_{n+1} - \alpha_1)(\alpha_{n+1} - \alpha_2) \cdots (\alpha_{n+1} - \alpha_{n-1})(\alpha_{n+1} - \alpha_n) = 0$

$\because \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$ 相異 $\therefore A = 0$

3° 故 $f(x) = 0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_{n-1})(x - \alpha_n)$ ，即 $f(x) \equiv 0$

(2) 零多項式定理推廣：

設 $f(x), g(x)$ 均為不大於 n 次的多項式，若有 $n+1$ 個相異數 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n+1}$ 均使得 $f(\alpha_i) = g(\alpha_i)$ ，則 $f(x) \equiv g(x)$ 。（此即多項式恆等定理）

【證明】

1° 設多項式 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$

$g(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0$

且令 $H(x) = f(x) - g(x) = (a_n - b_n)x^n + (a_{n-1} - b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_0 - b_0)$

2° $\because$ 有 $n+1$ 個相異值使得 $f(x) = g(x)$ ，即有 $n+1$ 個相異值使得 $H(x) = 0$

$\therefore$ 由零多項式定理知 $H(x) \equiv 0 \Rightarrow f(x) - g(x) \equiv 0$

故 $f(x) \equiv g(x)$

例 1

設 $f(x) = \frac{a-1}{a-b}x^2 + \frac{b+3}{b-c}x - \frac{c}{b-c}$ 且 a, b, c 為互異實數，若 $f(\pi) = f(\sqrt{2}) = f(100) = 0$ ，求數序 (a, b, c) 。

解 $\because \deg f(x) \leq 2$ 且有三相異數值 $\pi, \sqrt{2}, 100$ 使得 $f(\pi) = f(\sqrt{2}) = f(100) = 0$

$\therefore$ 由多項式恆等定理可知 $f(x) \equiv 0$ ，即 $\frac{a-1}{a-b}x^2 + \frac{b+3}{b-c}x - \frac{c}{b-c} \equiv 0$

故 $(a, b, c) = (1, -3, 0)$

例 2

若 $f(x) = ax^2 + bx + c$, $g(x) = x^2 + 2x + 3$ ，已知 $f(1) = g(2)$, $f(5) = g(6)$, $f(100) = g(101)$ ，求數序 (a, b, c) 。

解 $\because \deg f(x) \leq 2$, $\deg g(x+1) \leq 2$ 且有三相異數值 $1, 5, 100$ 使得 $f(x) = g(x+1)$

$\therefore$ 由多項式恆等定理可知 $f(x) \equiv g(x+1)$

例 3

若 a, b, c 為互異之實數，試化簡 $f(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}$ ，並求 $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(10)$ 。

解 1° $\because \deg f(x) \leq 2$ 且 $f(a) = 0 + \frac{(a-b)(a-c)}{(a-b)(a-c)} + 0 = 1$

2° 同理， $f(b) = f(c) = 1$

3° 由多項式恆等定理得 $f(x) \equiv 1$ 且 $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(10) = 10$