

除式固定的連續綜合除法

設 $x^3 + 4x^2 - 9x - 8 = a(x-2)^3 + b(x-2)^2 + c(x-2) + d$ ，試求數序 (a, b, c, d) 。

A diagram of a 3D coordinate system. The horizontal axis is labeled with 1, 4, -9, and -8. The vertical axis is labeled with 2. The origin is at the top right corner of the diagram. The axes are represented by lines extending from the origin.

↓ 除以 $x-2$

商式：

餘式：

↓ 除以 $x-2$

商式：

餘式：

↓ 除以 $x-2$

商式：

餘式：

⇒ 整個多項式連續綜合除法的過程可表現如下：

$$x^3 + 4x^2 - 9x - 8 = (x - 2)(x^2 + 6x + 3) - 2$$

[將 $x^3 + 4x^2 - 9x - 8$ 除以 $x - 2$]

$$= (x-2) [(x-2)(x+8)+19] -2$$

[將商 $x^2 + 6x + 3$ 再除以 $x - 2$]

$$= (x-2)^2 (\mathbf{x+8}) + 19(x-2) - 2$$

$$= (x-2)^2 [1 \cdot (x-2) + 10] + 19(x-2) - 2$$

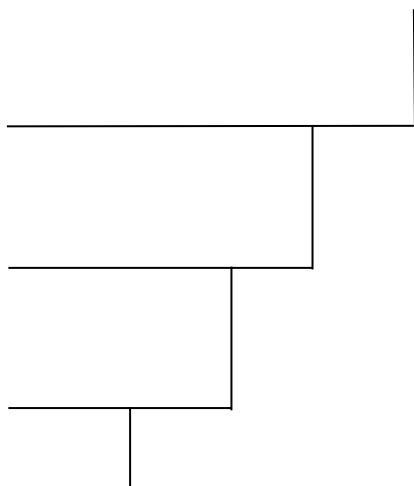
[將商 $x+8$ 再除以 $x-2$]

$$= 1(x-2)^3 + 10(x-2)^2 + 19(x-2) - 2$$

例 2

設 $16x^3 - 36x^2 + 20x - 2 = a(x - \frac{1}{2})^3 + b(x - \frac{1}{2})^2 + c(x - \frac{1}{2}) + d$ ，試求 a, b, c, d 之值。

解



$$a(x - \frac{1}{2})^3 + b(x - \frac{1}{2})^2 + c(x - \frac{1}{2}) + d$$

↓ 除以 $x - \frac{1}{2}$

$$\text{商式：} \boxed{a(x - \frac{1}{2})^2 + b(x - \frac{1}{2}) + c} \quad \text{餘式：} \boxed{d}$$

↓ 除以 $x - \frac{1}{2}$

$$\text{商式：} \boxed{a(x - \frac{1}{2}) + b} \quad \text{餘式：} \boxed{c}$$

↓ 除以 $2x - 1$

$$\text{商式：} \boxed{a} \quad \text{餘式：} \boxed{b}$$

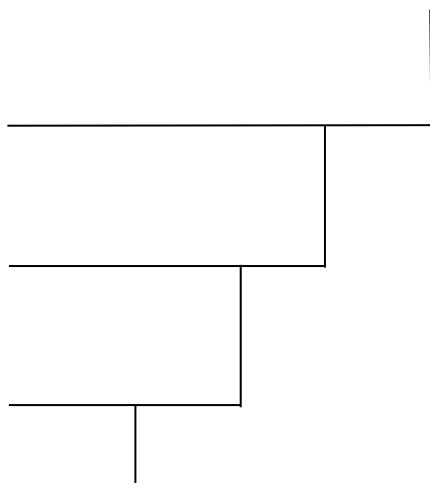
⇒ 整個多項式連續綜合除法的過程可表現如下：

$$\begin{aligned} 16x^3 - 36x^2 + 20x - 2 &= (x - \frac{1}{2})(16x^2 - 28x + 6) + 1 && \text{[將 } 16x^3 - 36x^2 + 20x - 2 \text{ 除以 } x - \frac{1}{2}] \\ &= (x - \frac{1}{2})[(x - \frac{1}{2})(16x - 20) - 4] + 1 && \text{[將商 } 16x^2 - 28x + 6 \text{ 再除以 } x - \frac{1}{2}] \\ &= (x - \frac{1}{2})^2(16x - 20) - 4(x - \frac{1}{2}) + 1 \\ &= (x - \frac{1}{2})^2[16 \cdot (x - \frac{1}{2}) - 12] - 4(x - \frac{1}{2}) + 1 && \text{[將商 } 8x - 10 \text{ 再除以 } x - \frac{1}{2}] \\ &= 16(x - \frac{1}{2})^3 - 12(x - \frac{1}{2})^2 - 4(x - \frac{1}{2}) + 1 \end{aligned}$$

例 3

設 $16x^3 - 36x^2 + 20x - 2 = a(2x-1)^3 + b(2x-1)^2 + c(2x-1) + d$ ，試求 a, b, c, d 之值。

解



$$a(2x-1)^3 + b(2x-1)^2 + c(2x-1) + d$$

↓ 除以 $2x-1$

$$\text{商式：} \boxed{a(2x-1)^2 + b(2x-1) + c} \quad \text{餘式：} \boxed{d}$$

↓ 除以 $2x-1$

$$\text{商式：} \boxed{a(2x-1) + b} \quad \text{餘式：} \boxed{c}$$

↓ 除以 $2x-1$

$$\text{商式：} \boxed{a} \quad \text{餘式：} \boxed{b}$$

⇒ 整個多項式連續綜合除法的過程可表現如下：

$$\begin{aligned} 16x^3 - 36x^2 + 20x - 2 &= (2x-1)(8x^2 - 14x + 3) + 1 && \text{[將 } 16x^3 - 36x^2 + 20x - 2 \text{ 除以 } 2x-1\text{]} \\ &= (2x-1) [(2x-1)(4x-5) - 2] + 1 && \text{[將商 } 8x^2 - 14x + 3 \text{ 再除以 } 2x-1\text{]} \\ &= (2x-1)^2 (4x-5) - 2(2x-1) + 1 \\ &= (2x-1)^2 [2 \cdot (2x-1) - 3] - 2(2x-1) + 1 && \text{[將商 } 4x-5 \text{ 再除以 } 2x-1\text{]} \\ &= 2(2x-1)^3 - 3(2x-1)^2 - 2(2x-1) + 1 \end{aligned}$$

型二 除式逐一減項的連續綜合除法

例 4

設 $x^3 - 4x^2 + 10x - 5 = a(x-1)(x-2)(x-3) + b(x-1)(x-2) + c(x-1) + d$ ，求 (a, b, c, d) 。

解 【法一】數值代入

依次用 $x=1$, $x=2$, $x=3$ 代入分別求 d , c , b ，再比較 x^3 係數得 a

【法二】連續綜合除法

1	-4	10	-5

$$a(x-1)(x-2)(x-3) + b(x-1)(x-2) + c(x-1) + d$$

↓ 除以 $x-1$

$$\text{商式：} \boxed{a(x-2)(x-3) + b(x-2) + c} \quad \text{餘式：} \boxed{d}$$

↓ 除以 $x-2$

$$\text{商式：} \boxed{a(x-3) + b} \quad \text{餘式：} \boxed{c}$$

↓ 除以 $x-3$

$$\text{商式：} \boxed{a} \quad \text{餘式：} \boxed{b}$$

⇒ 整個多項式連續綜合除法的過程可表現如下：

$$\begin{aligned} x^3 - 4x^2 + 10x - 5 &= (x-1)(x^2 - 3x + 7) + 2 && \text{[將 } x^3 - 4x^2 + 10x - 5 \text{ 除以 } x-1\text{]} \\ &= (x-1)[(x-2)(x-1) + 5] + 2 && \text{[將商 } x^2 - 3x + 7 \text{ 再除以 } x-2\text{]} \\ &= (x-1)(x-2)(x-1) + 5(x-1) + 2 \\ &= (x-1)(x-2)[1 \cdot (x-3) + 2] + 5(x-1) + 2 && \text{[將商 } x-1 \text{ 再除以 } x-3\text{]} \\ &= 1(x-1)(x-2)(x-3) + 2(x-1)(x-2) + 5(x-1) + 2 \end{aligned}$$

型三**合成多項式函數的置換****例 5**

設 $(x+1)^3 - 2(x+1)^2 + 3(x+1) + 5 = a(x-2)^3 + b(x-2)^2 + c(x-2) + d$ ，求 a, b, c, d 。

解 $(x+1)^3 - 2(x+1)^2 + 3(x+1) + 5 = a(x-2)^3 + b(x-2)^2 + c(x-2) + d$

TGDV



型四 多項式函數整數求值

遇多項式函數的整數求值問題，一般使用餘式定理。

例 6

試計算 $7^4 - 6 \times 7^3 - 4 \times 7^2 - 19 \times 7 - 11$ 之值。

解 1° 題意即「 $f(x) = x^4 - 6x^3 - 4x^2 - 19x - 11$ ，求 $f(7)$ 」

2° 可令 $f(x) = (x-7)Q(x) + r \Rightarrow f(7) = r$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & -6 & -4 & -19 & -11 & \\ \hline & & & & & 7 \end{array}$$

ATZI



例 7

求多項式 $f(x) = (2x-1)^4 - 10(2x-1)^3 + 26(2x-1)^2 + 3(2x-1) - 34$ 除以 $x-3$ 的餘式。

解 1° 所求即 $f(\quad) =$

2° 可令 $g(x) =$

又 $g(x) = (x-5)Q(x) + r \Rightarrow g(5) = r$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & -10 & 26 & 3 & -34 & \\ \hline & & & & & \end{array}$$

型五 多項式函數小數求值

遇多項式函數的小數求值問題，一般先決定一個較好處理的除式並使用連續綜合除法。

例 8

設 $f(x) = x^4 - 8x^3 + 25x^2 - 30x + 11$ ，試估計 $f(1.99)$ 並四捨五入到小數點後第四位。

解 1° 利用連續綜合除法將 $f(x)$ 化為 $x-2$ 降冪型可得

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 - 8x^3 + 25x^2 - 30x + 11 \\ &= \end{aligned}$$

$$2^\circ \quad f(1.99) = (-0.01)^4 + 0 \cdot (-0.01)^3 + (-0.01)^2 + 6(-0.01) + 3 \approx 2.9401$$

▣ 本題同義於「將 $(1.99)^4 - 8(1.99)^3 + 25(1.99)^2 - 30(1.99) + 11$ 四捨五入到小數點後第四位。

命題延伸

- (1) 若估計 $f(1.01)$ ，可將題目化為_____降冪型式較容易計算。
- (2) 若估計 $f(0.98)$ ，可將題目化為_____降冪型式較容易計算。
- (3) 若估計 $f(-0.49)$ ，可將題目化為_____降冪型式較容易計算。

型六 多項式函數無理數求值

遇多項式函數的無理數求值問題，一般先找到**最小多項式**，並使用除法求餘式。

例 9

設 $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3x - 4$ ，求 $f(1 + \sqrt{3})$ 。

解 【法一】

1°



$$\begin{aligned} 2^\circ \quad f(x) &= x^4 - 2x^2 + 3x - 4 \\ &= (x^2 - 2x - 2)(\quad) + (\quad) \end{aligned}$$

$$3^\circ \quad f(1 + \sqrt{3}) =$$

【法二】

1° 可由連續綜合除法將 $f(x)$ 表示成： $f(x) = (x-1)^4 + 4(x-1)^3 + 4(x-1)^2 + 3(x-1) - 2$

$$2^\circ \quad f(1 + \sqrt{3}) = \sqrt{3}^4 + 4 \times \sqrt{3}^3 + 4 \times \sqrt{3}^2 + 3 \times \sqrt{3} - 2 = 19 + 15\sqrt{3}$$

[若項數太多或二次根式無理數太大，則此法不適宜]

▣ 本題同義於「試求 $(1 + \sqrt{3})^4 - 2(1 + \sqrt{3})^2 + 3(1 + \sqrt{3}) - 4$ 之值。」

例 10

自行參考

設 $f(x) = x^5 + x^4 - 10x^3 - 10x^2 + x + 5$ ，求 $f(\sqrt{3} + \sqrt{2})$ 之值。

$$\begin{aligned} \text{解 } 1^\circ \quad \text{令 } x = \sqrt{3} + \sqrt{2} \quad &\Rightarrow x^2 = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 \quad \Rightarrow x^2 = 5 + 2\sqrt{6} \\ &\Rightarrow (x^2 - 5)^2 = 24 \quad \Rightarrow x^4 - 10x^2 + 1 = 0 \end{aligned}$$

$$2^\circ \quad \text{由除法可得 } f(x) = (x^4 - 10x^2 + 1)(x + 1) + 4$$

$$3^\circ \quad f(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = 4$$

例 11

三次根式共軛子母雙根號

自行參考

已知 $a = \sqrt[3]{2 + \sqrt{3}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{3}}$ ，則 $a^4 + 2a^3 - 3a^2 - 10a - 4$ 之值為_____。

立方公式

$$(1) \text{ 和立方公式： } (x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$$

$$(2) \text{ 差立方公式： } (x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = x^3 - y^3 - 3xy(x - y)$$

$$\text{解 } 1^\circ \quad a^3 = (2 + \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3}) + 3(\sqrt[3]{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{2 - \sqrt{3}})(\underbrace{\sqrt[3]{2 + \sqrt{3}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{3}}}_a)$$

$$\Rightarrow a^3 = 4 + 3(1)(a) \Rightarrow a^3 - 3a - 4 = 0$$

$$\begin{aligned} 2^\circ \quad a^4 + 2a^3 - 3a^2 - 10a - 4 &= (a^3 - 3a - 4)(a + 2) + 4 \quad [\text{由除法可得}] \\ &= (0)(a + 2) + 4 = 4 \end{aligned}$$