

### 例 10

自行參考

設  $f(x) = x^5 + x^4 - 10x^3 - 10x^2 + x + 5$ ，求  $f(\sqrt{3} + \sqrt{2})$  之值。

$$\begin{aligned} \text{解 } 1^\circ \quad \text{令 } x = \sqrt{3} + \sqrt{2} \quad &\Rightarrow x^2 = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 \quad \Rightarrow x^2 = 5 + 2\sqrt{6} \\ &\Rightarrow (x^2 - 5)^2 = 24 \quad \Rightarrow x^4 - 10x^2 + 1 = 0 \end{aligned}$$

$$2^\circ \quad \text{由除法可得 } f(x) = (x^4 - 10x^2 + 1)(x + 1) + 4$$

$$3^\circ \quad f(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = 4$$

### 例 11

三次根式共軛子母雙根號

自行參考

已知  $a = \sqrt[3]{2 + \sqrt{3}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{3}}$ ，則  $a^4 + 2a^3 - 3a^2 - 10a - 4$  之值為\_\_\_\_\_。

#### 立方公式

$$(1) \text{ 和立方公式： } (x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$$

$$(2) \text{ 差立方公式： } (x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = x^3 - y^3 - 3xy(x - y)$$

$$\text{解 } 1^\circ \quad a^3 = (2 + \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3}) + 3(\sqrt[3]{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{2 - \sqrt{3}})(\underbrace{\sqrt[3]{2 + \sqrt{3}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{3}}}_a)$$

$$\Rightarrow a^3 = 4 + 3(1)(a) \Rightarrow a^3 - 3a - 4 = 0$$

$$\begin{aligned} 2^\circ \quad a^4 + 2a^3 - 3a^2 - 10a - 4 &= (a^3 - 3a - 4)(a + 2) + 4 \quad [\text{由除法可得}] \\ &= (0)(a + 2) + 4 = 4 \end{aligned}$$