

(2) 差分理論：

$$\deg f(x) = n \Leftrightarrow \deg[f(x+p) - f(x+q)] = n-1 \quad (p \neq q)$$

【說明】

舉例來說，若 $f(x) = ax^2 + bx + c$

$$\text{則 } f(x+1) = a(x+1)^2 + b(x+1) + c = ax^2 + (2a+b)x + (a+b+c)$$

$$\text{故 } f(x+1) - f(x) = \underbrace{(\cancel{a} - a)}_{\text{消去最高項}} x^2 + \underbrace{(2a + \cancel{b} - b)}_{\text{保留次高項}} x + c$$

【說例】

$f(x)$ 為多項式且 $f(x+2) - f(x) = 4x^2 + 5$ ，則 $f(x)$ 的次數必為_____次。

3. 多項式的係數

多項式 $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ 有以下係數公式：

(1) 常數項：

$$a_0 = \boxed{} \circ \quad [x=0 \text{ 代入}]$$

(2) 係數和：

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \boxed{} \circ \quad [x=1 \text{ 代入}]$$

(3) 係數加減交錯：

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + a_n(-1)^n = \boxed{} \circ \quad [x=-1 \text{ 代入}]$$

(4) 偶項係數和：

$$a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{2k} = \boxed{} \circ \quad \left[\frac{(x=1 \text{ 代入}) + (x=-1 \text{ 代入})}{2} \right]$$

($2k$ 是不大於 n 的最大偶數)

(5) 奇項係數和：

$$a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2t+1} = \boxed{} \left[\frac{(x=1 \text{ 代入}) - (x=-1 \text{ 代入})}{2} \right]$$

($2t+1$ 是不大於 n 的最大奇數)

【說明】

$$f(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

$$f(-1) = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \cdots + (-1)^{n-1} a_{n-1} + (-1)^n a_n$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{f(1) + f(-1)}{2} = a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{2k} \\ \frac{f(1) - f(-1)}{2} = a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2t+1} \end{cases} \quad (2k \text{ 是偶數, } 2t+1 \text{ 是奇數})$$

$2k$ 與 $2t+1$ 兩者之中最大者為 n ，最小者為 $n-1$ 。

例 1

已知 $f(x)$ 為多項式且 $f(x+1)-f(x)=2x+5$ ，又 $f(0)=3$ ，求 $f(x)$ 。

解

例 2

已知二多項式 $f(x)=x^2+x+2$ ， $g(x)=3x^2-5x+1$ ，試回答下列問題：

- (1) 求 $f(x+1)$ 的常數項。
- (2) 求 $f(x-1)g(x+1)$ 之所有係數和。

解

(1) $f(x+1)$ 的常數項 = [$x=0$ 代入]

(2) $f(x-1)g(x+1)$ 的所有係數和 = [$x=1$ 代入]