

主題 2 多項式的係數



1. 多項式的合成

(1) 合成多項式的意義：

假設 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 及 $g(x)$ 皆為多項式，則合成多項式

$$f(g(x)) = a_n (g(x))^n + a_{n-1} (g(x))^{n-1} + \cdots + a_1 (g(x)) + a_0$$

(2) 合成多項式的表示法：

合成多項式 $f(g(x))$ 亦可寫成 $f \circ g(x)$ 。

【說例】

若 $f(x) = x^3 + x + 1$ ，則：

$$f(x^2 + 3) = \underline{\hspace{4cm}}, \deg f(x^2 + 3) = \underline{\hspace{2cm}}。$$

2. 多項式的次數討論

假設 $f(x)$ 及 $g(x)$ 為兩個多項式，且 $\deg f(x) = m$ ， $\deg g(x) = n$ ，其中 m, n 皆存在。

(1) 基本運算：

① 次數不同的加減：若 $m \neq n$ ，則 $\deg[f(x) \pm g(x)]$ 為 m, n 兩數之中最大者。

② 次數相同的加減：若 $m = n$ ，則 $\deg[f(x) \pm g(x)] \leq n$ 或 $f(x) \pm g(x) = 0$ 。

③ 相乘後的次數： $\deg[f(x) \cdot g(x)] = m + n$ 。

④ 合成後的次數： $\deg[f(g(x))] = m \cdot n$ 。

【說例】

若 $f(x)$ 與 $g(x)$ 皆為多項式，且 $\deg f(x) = 3$ ， $\deg g(x) = 2$ ，則：

① $\deg[f(x) \pm g(x)] = 3$

② $\deg[f(x) \cdot g(x)] = 5$

③ $\deg[f(g(x))] = 6$

④ $\deg[g(f(x))] = 6$