



1. 多項式的定義

(1) 定義：

設 n 是正整數或 0，若 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ 是給定的常數，則形如

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

的式子，稱之為 x 的多項式。我們常以 $f(x), g(x), h(x), \dots$ 來表示 x 的多項式。

(2) 單項式：

當多項式只含一項時，即 $f(x) = a_n x^n$ ，其中 n 是正整數或 0，稱 $f(x)$ 為單項式。

其中定義 $x^0 = 1$ 。

2. 多項式的相關名詞

(1) 多項式的係數：

若多項式 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ，則 $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$ 稱為多項式 $f(x)$ 的係數，最高次項非零係數稱為**領導係數**或**首項係數**。

(2) 多項式的次數：

若多項式 $f(x)$ 的最高次項之次數為 n ，記為

。

(3) 多項式的同類項：

兩多項式中，次數相同的項稱為**同類項**或**同次項**。

(4) 排列方式：

① 若 $f(x)$ 以 $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ 方式表達，則稱為 x 的**降冪排列**。

② 若 $f(x)$ 以 $a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$ 方式表達，則稱為 x 的**升冪排列**。

(5) 多項式係數的數域：

- ① $\square$ 表示實係數多項式所成之集合。例如： $x^2 - \sqrt{2}x + \pi \in \mathbb{R}[x]$ 。
- ② $\mathbb{Q}[x]$ 表示有理係數多項式所成之集合。例如： $x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{4}{5} \in \mathbb{Q}[x]$ 。
- ③ $\mathbb{Z}[x]$ 表示整係數多項式所成之集合。例如： $x^2 - 3x + 2 \in \mathbb{Z}[x]$ 。
- ③ $\mathbb{N}[x]$ 表示正整係數多項式所成之集合。例如： $5x^2 + 7x + 1 \in \mathbb{N}[x]$ 。

3. 常數多項式

(1) 常數多項式：

若多項式 $f(x) = a_0$ ，即僅有常數項，則稱為**常數多項式**。

(2) 分類：

常數多項式分為兩種：

- ① 若 $f(x) = c$ (c 為非 0 之常數)，則可稱 $f(x)$ 為**零次多項式**，例如： $f(x) = 3$ 。
- ② 若 $f(x) = 0$ ，則可稱 $f(x)$ 為**零多項式**，且不定義次數。

4. 多項式相等

(1) 多項式相等條件：

兩多項式 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ ， $g(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$
相等的條件為：

- ① 次數相等： $\deg f(x) = \deg g(x)$
- ② 同類項係數相等： $a_i = b_i, \forall i \in \{0, 1, 2, \cdots, n\}$

【說例】

若兩多項式 $4x^2 - 2x + 3, ax^3 + bx^2 + cx + d$ 相等，則 $a = 0, b = 4, c = -2, d = 3$ 。

(2) 相等性質：

若兩多項式相等，即 $f(x) = g(x)$ ，則不管 α 為什麼數值，均會使得 $f(\alpha) = g(\alpha)$ 。

5. 多項式的加法、減法與乘法

(1) 多項式的加法與減法：

兩多項式的加法(減法)，就是把兩個多項式的同類項的係數相加(相減)。又其所得之運算結果仍為一個多項式。

【說例】

若 $f(x) = 2x^3 + 5x + 7$, $g(x) = x^2 + 6x - 1$, 試計算 $f(x) + g(x)$ 。

⇒ 法一 橫式計算

$$\begin{aligned}f(x) + g(x) &= (2x^3 + 5x + 7) + (x^2 + 6x - 1) \\&= (2+0)x^3 + (0+1)x^2 + (5+6)x + [7+(-1)] \\&= 2x^3 + x^2 + 11x + 6\end{aligned}$$

⇒ 法二 直式計算

$$\begin{array}{r}2x^3 + 0x^2 + 5x + 7 \leftarrow f(x) \\+) \quad \quad x^2 + 6x - 1 \leftarrow g(x) \\ \hline 2x^3 + x^2 + 11x + 6\end{array}$$

⇒ 法三 分離係數直式計算

$$\begin{array}{r}2 \ +0 \ +5 \ +7 \leftarrow f(x) \\+) \quad \quad 1 \ +6 \ -1 \leftarrow g(x) \\ \hline 2 \ +1 \ +11 \ +6\end{array}$$

(2) 單項式的乘法：

單項式的乘法定義為 $\alpha x^n \cdot \beta x^m = (\alpha\beta)x^{n+m}$ ，其中 α, β 為係數。

【說例】

$$7x^2 \cdot 3x^5 = (7 \cdot 3)x^{2+5} = 21x^7$$

(3) 多項式的乘法：

兩多項式相乘時是先將單項式利用分配律逐項相乘後，再進行同次項(同類項)合併。又其所得之運算結果仍為一個多項式。

【說例】

若 $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $g(x) = x^3 + x - 1$, 試計算 $f(x) \cdot g(x)$ 。

⇒ 法一 橫式計算

$$\begin{aligned} f(x) \cdot g(x) &= (x^2 - 2x + 3)(x^3 + x - 1) \\ &= x^2(x^3 + x - 1) - 2x(x^3 + x - 1) + 3(x^3 + x - 1) && \text{[分配律乘開]} \\ &= x^5 + x^3 - x^2 - 2x^4 - 2x^2 + 2x + 3x^3 + 3x - 3 && \text{[分配律乘開]} \\ &= x^5 - 2x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 5x - 3 && \text{[合併同類項]} \end{aligned}$$

⇒ 法二 直式算法

	x^5	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0
				1	-2	3
×)			1	0	1	-1
				-1	2	-3
			1	-2	3	
	1	-2	3			
	1	-2	4	-3	5	-3

(4) 多項式的高次表示：

多項式 $f(x)$ 的 n 次方寫成_____。

(5) 運算性質：

假設 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ 均為多項式，則其運算滿足以下性質：

- ① 加法交換律： $f(x) + g(x) =$
- ② 加法結合律： $[f(x) + g(x)] + h(x) =$
- ③ 乘法交換律： $f(x) \cdot g(x) = g(x) \cdot f(x)$
- ④ 乘法結合律： $[f(x) \cdot g(x)] \cdot h(x) =$
- ⑤ 左分配律： $h(x) \cdot [f(x) + g(x)] =$
- ⑥ 右分配律： $[f(x) + g(x)] \cdot h(x) = f(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h(x)$

例 1

若 $f(x) = 3x^2 - 12x + 11$, $g(x) = a(x-1)(x-2) + b(x-2)(x-3) + c(x-3)(x-1)$, 若 $f(x), g(x)$ 為兩個相等的多項式, 求數序 (a, b, c) 。

解 【法一】比較係數法

$$3x^2 - 12x + 11 = a(x-1)(x-2) + b(x-2)(x-3) + c(x-3)(x-1)$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 12x + 11 = (a+b+c)x^2 - (3a+5b+4c)x + (2a+6b+3c)$$

$$\text{經比較係數可得} \begin{cases} a+b+c=3 \\ 3a+5b+4c=12 \\ 2a+6b+3c=11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=1 \end{cases}$$

【法二】數值代入法

$$3x^2 - 12x + 11 = a(x-1)(x-2) + b(x-2)(x-3) + c(x-3)(x-1)$$

例 2

已知 $f(x) = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ ，試求 a_0, a_5, a_4, a_3 。

解

(1)

(2)

(3) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)$

(4) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)$

YYAN



▣ 這一題是數據較大的類似題，同學可以挑戰一下哦！

$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)(x+6)(x+7)(x+8)(x+9)(x+10) = a_{10}x^{10} + a_9x^9 + \dots + a_1x + a_0$
，求 a_0, a_8, a_9, a_{10} 。

答： $(a_0, a_8, a_9, a_{10}) = (3628800, 1320, 55, 1)$