

例 6 | 三角形的內切圓

試求三直線 $L_1: 2x - y = -4$, $L_2: 2x + y = 12$, $L_3: x - 2y = 4$ 所圍成三角形之內切圓方程式。

解 1° 內切圓圓心 (內心) 即為內角平分線交點

2° 求 L_1, L_2 之角平分線：

$$\frac{|2x - y + 4|}{\sqrt{5}} = \frac{|2x + y - 12|}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow 2x - y + 4 = \pm(2x + y - 12) \Rightarrow x = 2 \text{ 或 } y = 8$$

取三角形內角平分線 $x = 2$

3° 求 L_1, L_3 之角平分線：

$$\frac{|2x - y + 4|}{\sqrt{5}} = \frac{|x - 2y - 4|}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow 2x - y + 4 = \pm(x - 2y - 4) \Rightarrow x - y = 0 \text{ 或 } x + y + 8 = 0$$

取三角形內角平分線 $x - y = 0$

$$4^\circ \text{ 內切圓圓心為 } \begin{cases} x = 2 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}, \text{ 又半徑為 } d((2, 2), L_1) = \frac{|4 - 2 + 4|}{\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}}$$

$$\text{故圓的方程式為 } (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = \frac{36}{5}$$

