

型一**同側異側的判定****例 1**

若 $A(1, k), B(k, -1)$ 在 $L: x + 2y + 1 = 0$ 之異側，求 k 範圍。

解 $A(1, k), B(k, -1)$ 在 L 異側

**例 2****109 學測修改**

設 S 為坐標平面上直線 $2x + y = 10$ 被平行線 $x - 2y + 15 = 0$ 與 $x - 2y = 0$ 所截的線段（含端點）。若直線 $4x - y = c$ 與 S 有交點，則 c 的最大值為_____。

解 1° $\begin{cases} 2x + y = 10 \\ x - 2y + 15 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 8 \end{cases}$ ，設線段 S 的一個端點 $A(1, 8)$

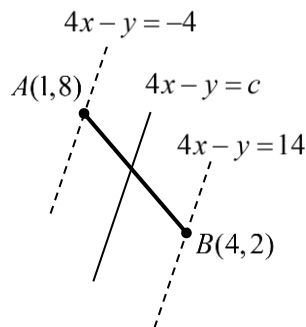
2° $\begin{cases} 2x + y = 10 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$ ，設線段 S 的一個端點 $B(4, 2)$

3° 若 $4x - y = c$ 與 S 有交點，即 $4x - y = c$ 與 $\overline{AB}$ 有交點

$$\therefore (4 \times 1 - 8 - c)(4 \times 4 - 2 - c) \leq 0 \Rightarrow (-4 - c)(14 - c) \leq 0$$

$$\Rightarrow (c + 4)(c - 14) \leq 0 \Rightarrow -4 \leq c \leq 14$$

故 c 的最大值為 14

**⇒ 另一種觀點**

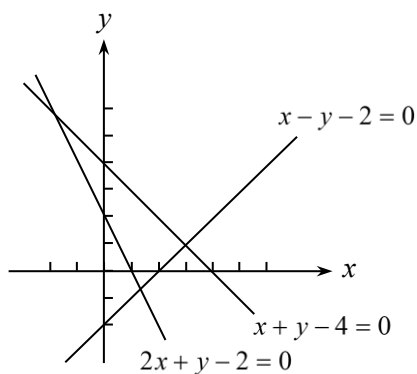
$4x - y = c$ 的 x 係數為正，故直線越往右邊， c 值越大。直接將 $B(4, 2)$ 代入 $4x - y = c$ 即可得 c 的最大值。

型二 二元一次聯立方程組所圍區域

例 3

試將不等式 $\begin{cases} x - y \leq 2 \\ x + y \leq 4 \\ 2x + y \geq 2 \end{cases}$ 在 xy 平面上作圖。

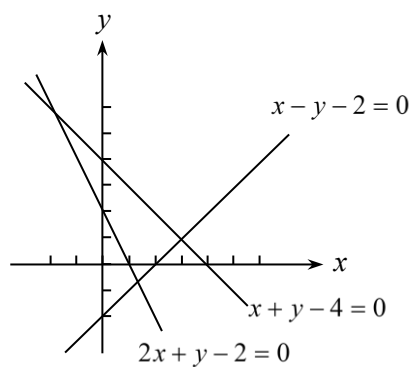
解 $\begin{cases} x - y \leq 2 \\ x + y \leq 4 \\ 2x + y \geq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y - 2 \leq 0 \\ x + y - 4 \leq 0 \\ 2x + y - 2 \geq 0 \end{cases}$



例 4

試將不等式 $2x + 3y + 1 \leq x + 4y + 3 \leq 3y + 7 \leq 2x + 4y + 5$ 在 xy 平面上作圖。

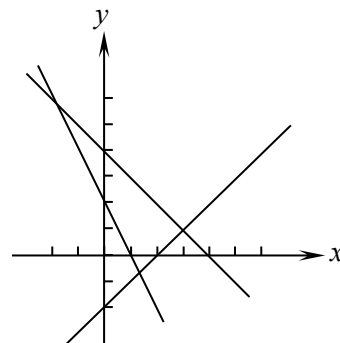
解 $\begin{cases} 2x + 3y + 1 \leq x + 4y + 3 \\ x + 4y + 3 \leq 3y + 7 \\ 3y + 7 \leq 2x + 4y + 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y - 2 \leq 0 \\ x + y - 4 \leq 0 \\ 2x + y - 2 \geq 0 \end{cases}$



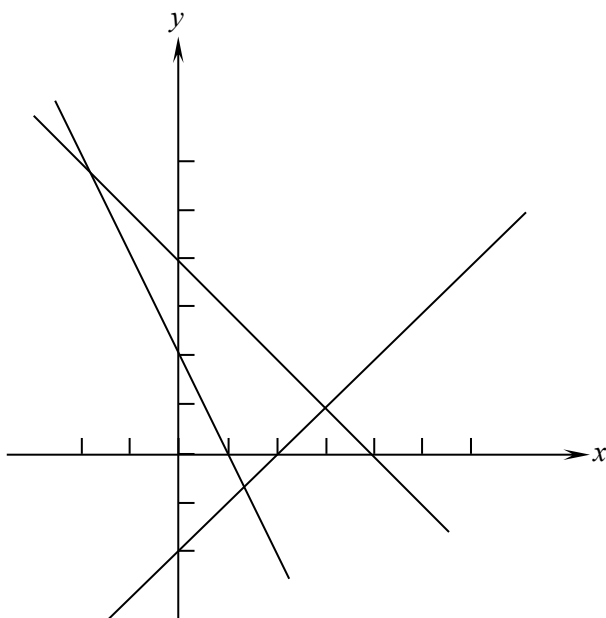
例 5

如右圖，三條直線 $L_1: x - y - 2 = 0$, $L_2: x + y - 4 = 0$, $L_3: 2x + y - 2 = 0$ 在平面上圍成一個封閉三角形區域 Ω (含邊界)。若點 $P(a, b)$ 為區域 Ω 上的點，試選出正確選項：

- (1) $a < 5$
- (2) $a + b - 5 < 0$
- (3) $-a + b + 2 > 0$
- (4) $2a + b < 0$
- (5) $a - b > 0$



解



例 6

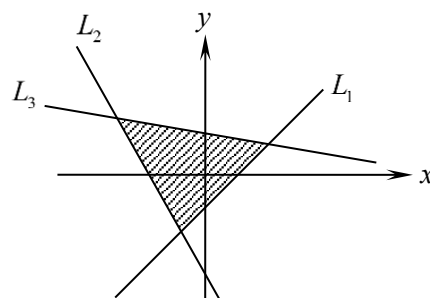
各校重要考題

右圖中，陰影部份 (三角形的內部及其邊界) 為

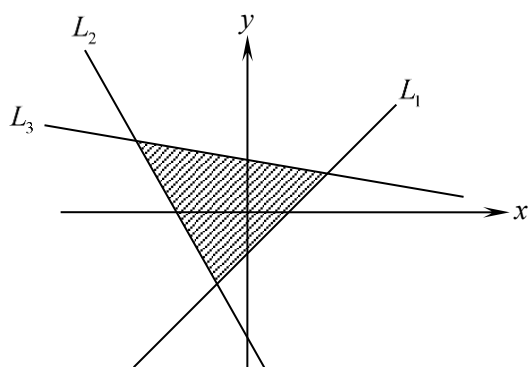
二元一次聯立方程式
$$\begin{cases} x + ay \geq b \\ cx + y \leq d \\ x - y \leq e \end{cases}$$
 的圖形區域，

且 a, b, c, d, e 均為實數，則下列敘述哪些是正確的？

- (A) $a > 0$ (B) $b < 0$ (C) $c > 0$ (D) $d < 0$ (E) $e > 0$ 。



解

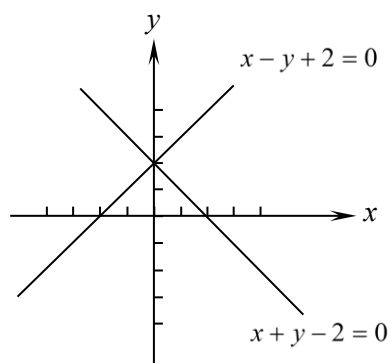


型三 連乘積型方程組所圍區域

例 7

試將不等式 $(x+y-2)(x-y+2) \leq 0$ 在 xy 平面上作圖。

解 $(x+y-2)(x-y+2) \leq 0$



FQDK

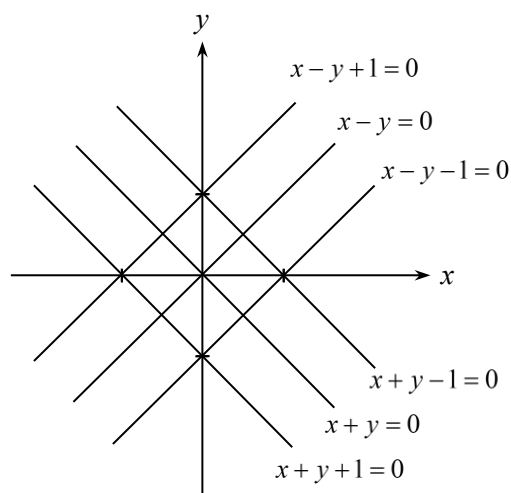


例 8

在 xy 平面上圖解以下不等式：

$$(x+y)(x+y-1)(x+y+1)(x-y)(x-y-1)(x-y+1) \geq 0$$

解



JNDE

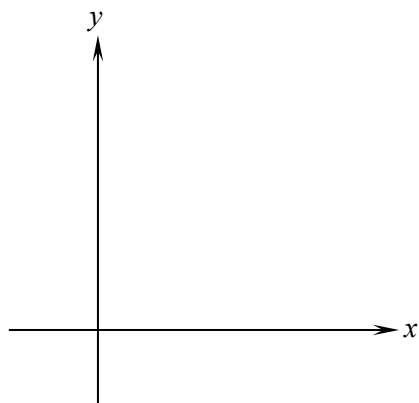


例 9

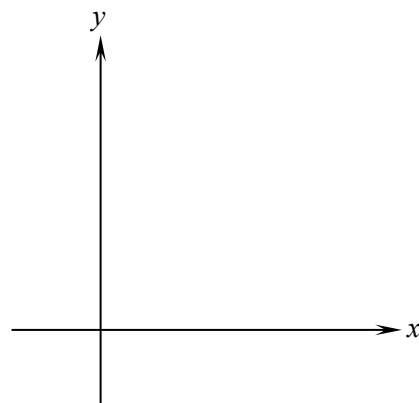
- (1) 在 xy 平面上繪出不等式 $\sqrt{x}\sqrt{y}(x+y-1) < 0$ 所表示的區域圖形。
- (2) 在 xy 平面上不等式 $xy(x+y-1) < 0$ 與不等式 $\sqrt{x}\sqrt{y}(x+y-1) < 0$ 所表示的區域圖形有何不同？

解

(1)



(2)



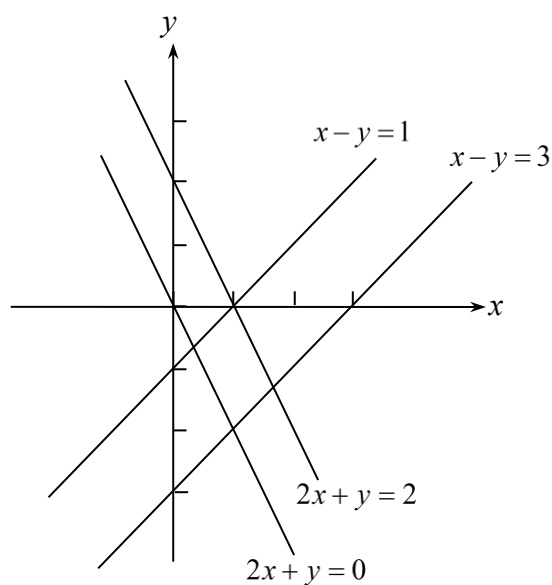
型四 區域面積問題

例 10

已知 $\begin{cases} 1 \leq x - y \leq 3 \\ 0 \leq 2x + y \leq 2 \end{cases}$ ，試回答下列問題：

- (1) 在 xy 平面上作 (x, y) 圖形。
- (2) 求 (x, y) 面積。

解



QBDB



▣ [北一女中]

聯立不等式 $\begin{cases} 0 \leq 2x - y \leq 8 \\ 0 \leq 2x + y \leq 8 \end{cases}$ 所圍的四邊形區域被直線 $L: y = m(x - 4) + 4$ 等分它的面積，則

$m = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答：2

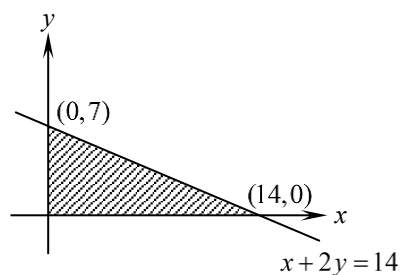
設 a 為一實數，已知在第一象限滿足聯立不等式 $\begin{cases} x-3y \leq a \\ x+2y \leq 14 \end{cases}$ 的所有點所形成之區域面積為 $\frac{213}{5}$ 平方單位，則 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

EDNL

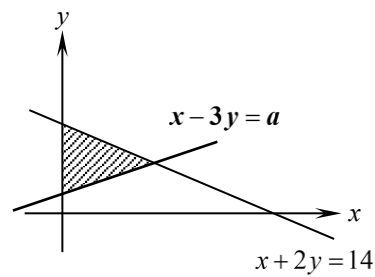
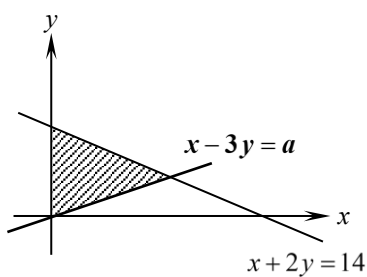
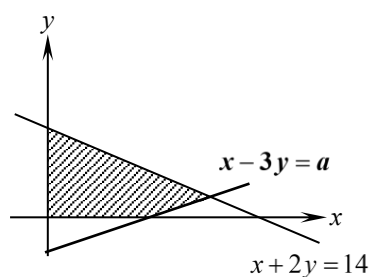


解 1° $x+2y \leq 14$ 在第一象限所圍面積為

$$\frac{1}{2} \times 14 \times 7 = 49$$

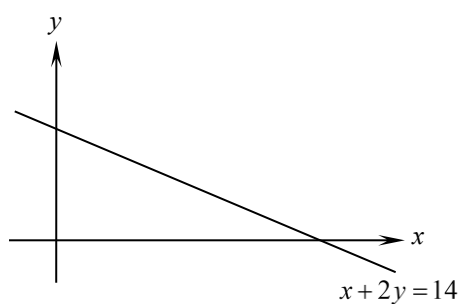


2° 聯立不等式形成的點集合有三種可能性：



但由面積 $\frac{213}{5} = 42.6$ 之大小可判定是第一種圖形

3°



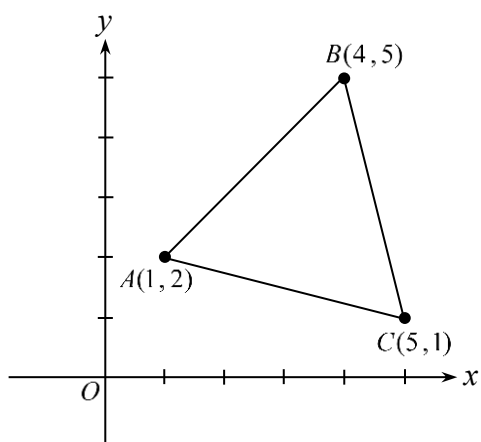
型五 格子點問題

例 12

平面上有三點 $A(1, 2)$, $B(4, 5)$, $C(5, 1)$ ，試回答下列問題：

- (1) 試以聯立不等式組表示 $\triangle ABC$ 內部 (含邊界)。
- (2) 若 $P(k, 3k-2)$ 是 $\triangle ABC$ 內部 (含邊界) 一點，求 k 範圍。
- (3) 求 $\triangle ABC$ 內部 (含邊界) 的格子點數。

解 (1)

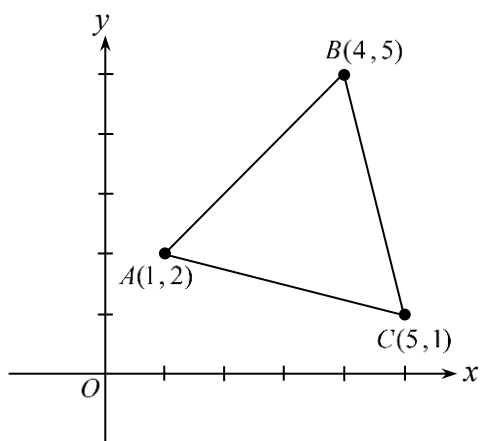


BQJN



(2)

(3)



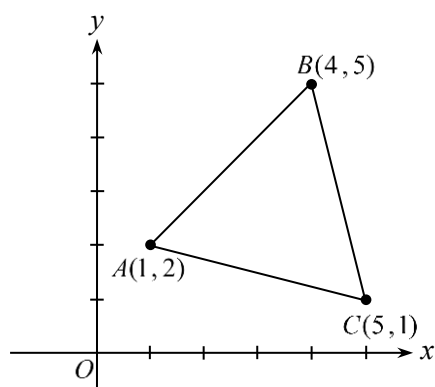
型六 目標函數值問題

例 13

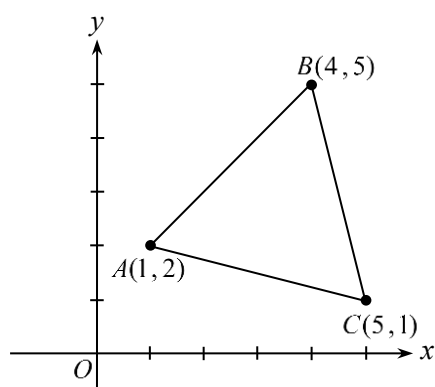
已知 $\begin{cases} x - y + 1 \geq 0 \\ 4x + y - 21 \leq 0 \\ x + 4y - 9 \geq 0 \end{cases}$ ，試回答下列問題：

- (1) 求 $x + y$ 之最大值與最小值。
- (2) 求 $\frac{y}{x}$ 之最大值與最小值。
- (3) 求 $x^2 + y^2 - 4x + 4$ 之最大值與最小值。

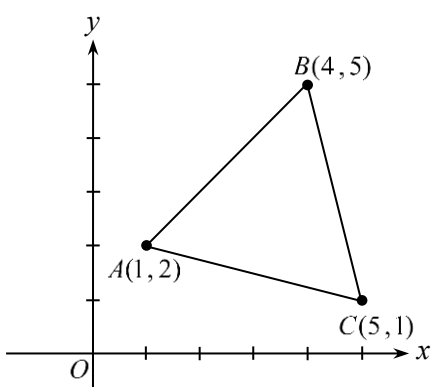
解 (1)



(2)



(3)



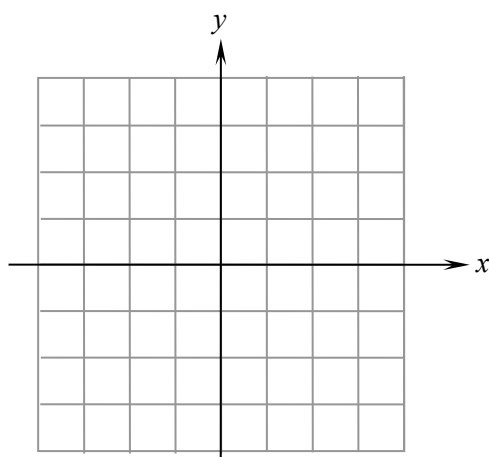
型七 菱形作圖區域判定

例 14

試將不等式 $(|x|+|y|-1)(|x|+|y|-2)(|x|+|y|-3) \leq 0$ 在 xy 平面上作圖。

解

$$\begin{aligned} & (|x|+|y|-1)(|x|+|y|-2)(|x|+|y|-3) \leq 0 \\ \Rightarrow & \left(\frac{|x|}{1} + \frac{|y|}{1} - 1\right) \left(\frac{|x|}{2} + \frac{|y|}{2} - 1\right) \left(\frac{|x|}{3} + \frac{|y|}{3} - 1\right) \leq 0 \end{aligned}$$

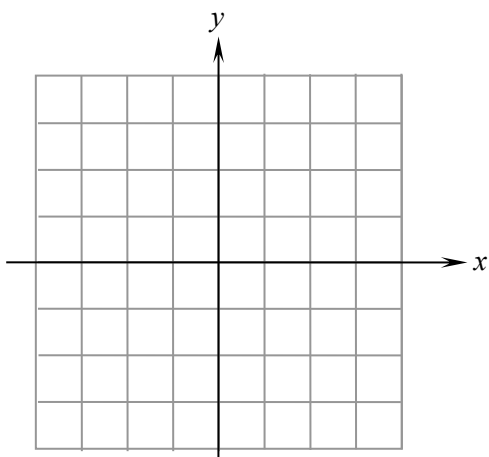


例 15

在直角坐標平面上，不等式 $(|x|+2|y|-1)(3|x|+|y|-1) \leq 0$ 圖形的面積為_____。

解

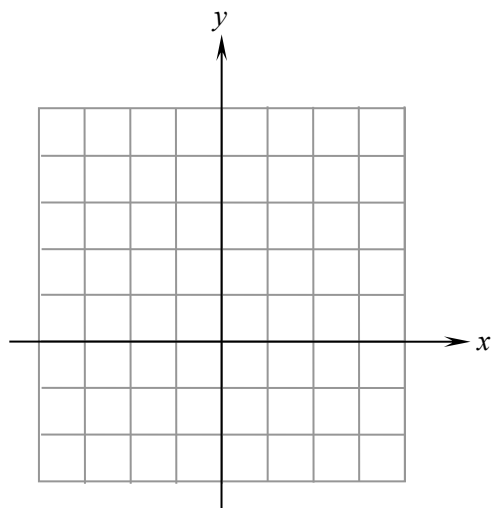
$$(|x|+2|y|-1)(3|x|+|y|-1) \leq 0$$



例 16

若直線 $y = mx + 5$ 與不等式 $|x| + |y| = 3$ 的圖形有交點，則實數 m 的範圍為_____。

解



▣ 【台中女中】

不等式組 $\begin{cases} 2|x| + |y| \leq 8 \\ x^2 + y^2 \geq 4 \end{cases}$ 所圍成的區域內（含邊界）有_____個格子點。

答：64