

(3) 直線方程式有多項係數是未知數：

直線方程式 $L: kx + 3k + 2 - y = 0$ 經整理後可得 _____，可

看出 L 是恆過 $(-3, 2)$ 的直線且斜率為 k ，並隨著 k 改變而繞著 $(-3, 2)$ 旋轉。

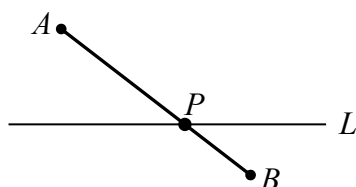
3. 距離極值

(1) $\overline{PA} + \overline{PB}$ 最小值：

給定兩定點 A, B 及直線 L ，若 P 在 L 上，以下討論何時有 $\overline{PA} + \overline{PB}$ 最小值。

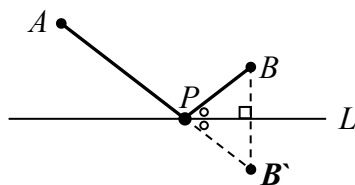
① 若 A, B 在 L 異側：

當 P 為 $\overline{AB}$ 與 L 的交點時，即是 $\overline{PA} + \overline{PB}$ 有最小值時，且 $\min(\overline{PA} + \overline{PB}) = \overline{AB}$ 。



② 若 A, B 在 L 同側：

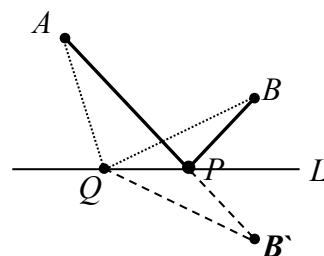
作 B 關於 L 的對稱點 B' (或作 A 之對稱點)，當 P 為 $\overline{AB'}$ 與 L 的交點時，即是 $\overline{PA} + \overline{PB}$ 有最小值時，且 $\min(\overline{PA} + \overline{PB}) = \overline{AB'}$ 。



【說明】

若 Q 為 L 上異於 P 的任一點，則

$$\overline{QA} + \overline{QB} = \underbrace{\overline{QA} + \overline{QB'}}_{\Delta QAB' \text{ 任二邊之和大於第三邊}} > \overline{AB'} = \overline{PA} + \overline{PB} = \overline{PA} + \overline{PB}。$$



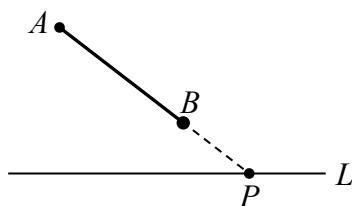
(2) $|\overline{PA} - \overline{PB}|$ 最大值：[自行參考]

給定兩定點 A, B 及直線 L ，若 P 在 L 上，以下討論何時有 $|\overline{PA} - \overline{PB}|$ 最大值。

① 若 A, B 在 L 同側：

當 P 為直線 AB 與 L 的交點時，即 $|\overline{PA} - \overline{PB}|$ 有最大值時，且

$$\max |\overline{PA} - \overline{PB}| = \overline{AB}。$$

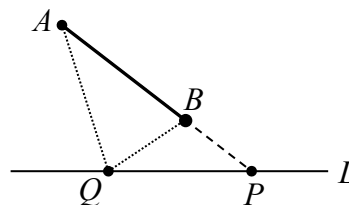


【說明】

若 Q 為 L 上異於 P 的任一點，則

$$|\overline{QA} - \overline{QB}| < \overline{AB} = |\overline{PA} - \overline{PB}|。$$

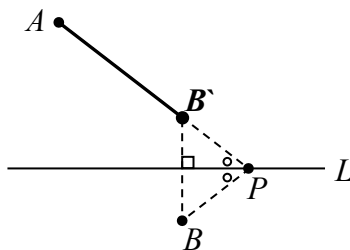
ΔQAB 任二邊之差小於第三邊



② 若 A, B 在 L 異側：

作 B 關於 L 的對稱點 B' (或作 A 之對稱點)，當 P 為直線 AB' 與 L 的交點時，

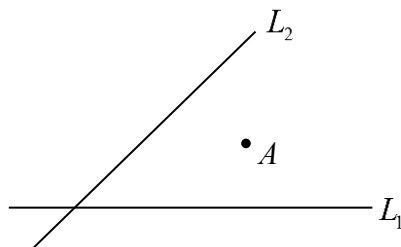
即 $|\overline{PA} - \overline{PB}|$ 有最大值時，且 $\max |\overline{PA} - \overline{PB}| = \overline{AB'}$ 。



(3) $\overline{AP} + \overline{AQ} + \overline{PQ}$ 最小值：

給定定點 A 及兩直線 L_1, L_2 ，若 P, Q 分別在 L_1, L_2 上，以下討論何時有 $\triangle APQ$ 周長最小值：

作 A 關於 L_1 、 L_2 的對稱點 A_1 、 A_2 ，連接 $\overline{A_1A_2}$ ，當 P 、 Q 分別為 $\overline{A_1A_2}$ 與 L_1 、 L_2 的交點時，即 $\triangle APQ$ 周長有最小值，且 $\triangle APQ$ 周長最小值 $= \overline{A_1A_2}$ 。

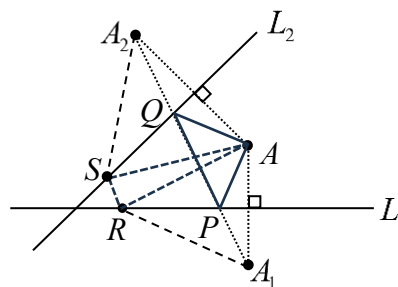


【說明】

若 S 、 R 分別為 L_1 、 L_2 異於 P 、 Q 的任兩點，則

$$\begin{aligned}\triangle APQ \text{ 周長} &= \overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QA} \\ &= \overline{A_1P} + \overline{PQ} + \overline{QA_2} = \overline{A_1A_2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\triangle ARS \text{ 周長} &= \overline{AR} + \overline{RS} + \overline{SA} \\ &= \overline{A_1R} + \overline{RS} + \overline{SA_2} > \overline{A_1A_2}\end{aligned}$$



(4) 到四邊形頂點的距離和的最小值：

給定平面上的四邊形 $ABCD$ 且 P 為平面上的動點。討論何時有 $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PD}$ 最小值：

當 P 為 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 的交點時，即是 $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PD}$ 有最小值時，且 $\min(\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PD}) = \overline{AC} + \overline{BD}$ 。

