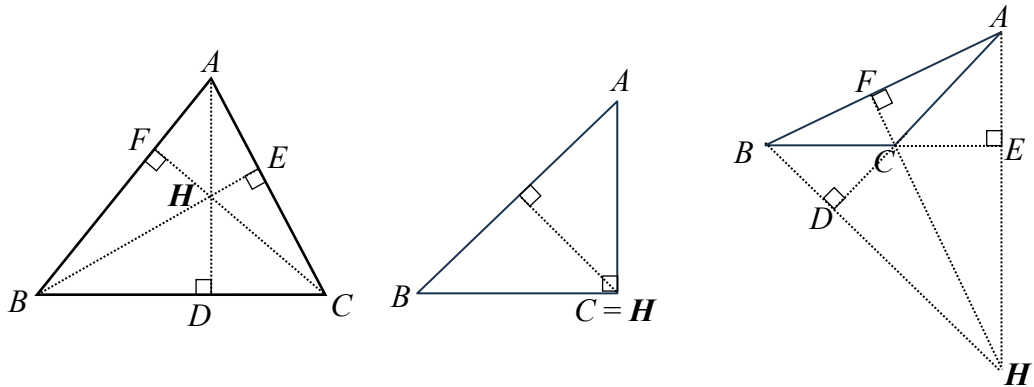


4. 三角形的垂心

(1) 定義：

平面上 $\triangle ABC$ 的三高交於點 H ， H 點即稱為垂心。且垂心 H 可能在 $\triangle ABC$ 內部、外部或邊上。

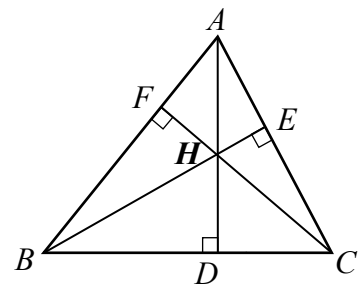


(2) 坐標求法：

① 假設垂心坐標 $H(x, y)$ ，

再利用 $\begin{cases} m_{AH} \cdot m_{BC} = -1 \\ m_{BH} \cdot m_{AC} = -1 \end{cases}$ 得 H 。

② 求出 AH 和 BH 的直線方程式，
再利用 AH 和 BH 交點得 H 。



5. 尤拉線 [非課綱範圍，請自行參考]

(1) 意義：

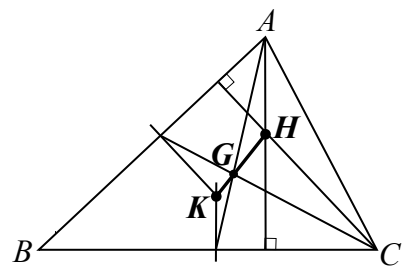
所有的三角形之外心、重心、垂心皆會共線，
此線稱為尤拉線。

(2) 性質：

若三角形之外心、重心、垂心分別為 K, G, H ，則：

① 外心 K 、重心 G 、垂心 H 共線。

② $\overline{KG}:\overline{GH}=1:2$ 。



【證明】

1° K 為 $\triangle ABC$ 外接圓圓心

作直線 BK 交圓於 F 且 $\overline{BF}$ 為直徑

$$\therefore \overline{BM} : \overline{MC} = \overline{BK} : \overline{KF} = 1:1$$

$$\therefore \overline{FC} \perp \overline{BC} \text{ 且 } \overline{FC} = 2\overline{KM}$$

$$\Rightarrow \overline{FC} \parallel \overline{AH} \text{ 且 } \overline{FC} = 2\overline{KM} \dots\dots ①$$

2° $\because \overline{BF}$ 為直徑 $\therefore \overline{AF} \perp \overline{AB}$

又 $\overline{CQ}$ 為 $\overline{AB}$ 邊上的高 $\therefore \overline{CQ} \perp \overline{AB}$

故 $\overline{AF} \parallel \overline{CH} \dots\dots ②$

3° 由①②可得知 $AFCH$ 為平行四邊形

$$\text{且 } \overline{AH} = \overline{FC} = 2\overline{KM} \quad (\triangle BKM \sim \triangle BFC) \dots\dots ③$$

4° 連接中線 $\overline{AM}$ ，重心 G 在 $\overline{AM}$ 上

$$\text{且 } \overline{MG} : \overline{GA} = 1:2 \dots\dots ④$$

5° 由③④且 $\angle KMG = \angle GAH$ (內錯角)

$$\therefore \triangle GMK \sim \triangle GAH \text{ 且 } \overline{KG} : \overline{GH} = 1:2$$

故 $K、G、H$ 共線，且 $\overline{KG} : \overline{GH} = 1:2$

