

主題 3 直線方程式

SDMK



1. 和直線相關的名詞

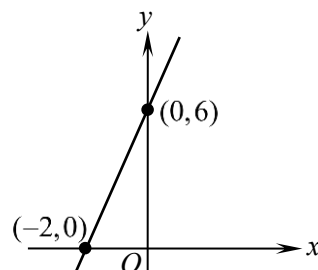
(1) 截距：

圖形與 x 軸交點的 x 坐標稱為 **x 截距**；圖形與 y 軸交點的 y 坐標稱為 **y 截距**。

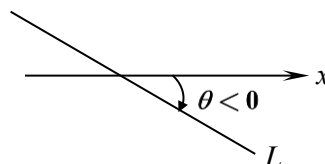
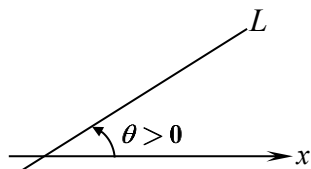
【說明】

右圖直線圖形的 x 截距為_____；

y 截距為_____。



(2) 斜角：



直線 L 與 x 軸正向所夾之 $\pm 90^\circ$ 範圍內的**廣義角**，稱為 L 的**斜角**。其中正斜角稱為**仰角**，負斜角的絕對值稱為**俯角**。

2. 平面上的直線方程式

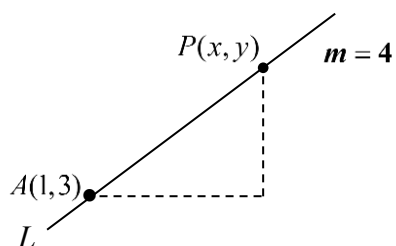
(1) 點斜式：

給定一直線 L 的斜率 m ，及 L 上之一點 (x_0, y_0) ，則 L 的方程式即確定為

$$L: y - y_0 = m(x - x_0)。$$

在平面上所有的直線中，只有鉛直線無法用此型式表達。

【說明】



$$\frac{y-3}{x-1} = m = 4, x \neq 1 \Rightarrow y-3 = 4(x-1), x \neq 1$$

但 $A(1,3)$ 亦為直線 L 上一點

$$\therefore L: y-3 = 4(x-1)$$

【說例 1】恆過定點的直線怎麼假設？

坐標平面上，過點 $(1,2)$ 直線可設為 _____。

【說例 2】

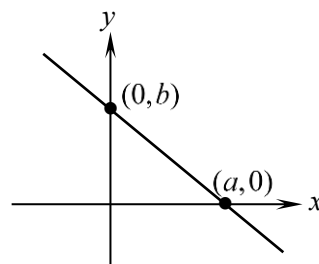
坐標平面上，過點 $(1,2)$ 與點 $(3,7)$ 的直線斜率為 _____，且此直線方程式為 _____。

(2) 截距式：

① 給定一直線 L 之 x 截距為 a ， y 截距為 b ，

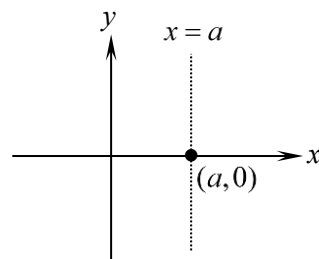
且 a, b 皆為非零實數，則 L 之方程式為

$L:$ _____。



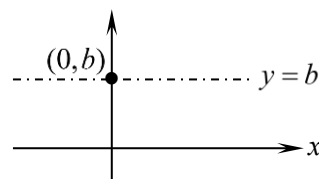
② 若 L 僅有 x 截距 a ，而無 y 截距，

則 L 之方程式為 $L:$ _____。



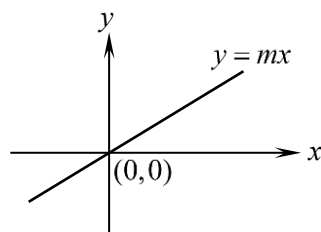
③ 若 L 僅有 y 截距 b ，而無 x 截距

，則 L 之方程式為 $L:$ _____。



④ 若 L 之 x 截距與 y 截距皆為 0 ，

則 L : 。



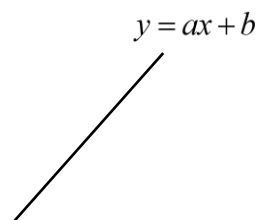
(3) 斜截式：

給定一直線 L 的斜率 a ，及 L 之 y 截距 b ，則 L 的方程式即確定為

$$L: y = ax + b。$$

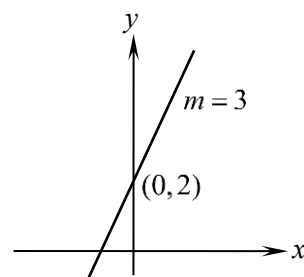
在平面上所有的直線中，只有鉛直線無法用此型式表達。

【說明】



【說例 1】

$L: y = 3x + 2$ 為斜率 3 且過 $(0, 2)$ 之直線。



【說例 2】 y 截距固定的直線怎麼假設？

坐標平面上，恆過點 $(0, 2)$ 直線但並非鉛直迫可設為 _____。

(4) 一般式：

若將平面上直線表成 $L: ax + by + c = 0$ 或 $L: ax + by = -c$ ，稱之一般式，若直

線 L 之斜率 m 存在，則 $m = \frac{-a}{b}$ 。平面上所有的直線皆可用此型式表達。

【說例】

斜率	斜截式假設	一般式假設
$m = \frac{1}{7}$		
$m = \frac{-5}{2}$		
$m = 3$		

3. 平面上的直線假設法**(1) 平行假設法：**

和直線 $ax + by + c = 0$ 平行的直線可設 $ax + by + k = 0$ 。 [前兩項係數照抄]

【說例】

和直線 $x - 2y - 7 = 0$ 平行且過 $(3, 1)$ 的直線為 _____。

(2) 垂直假設法：

和直線 $ax + by + c = 0$ 垂直的直線可設 $bx - ay + k = 0$ 。 [係數對調 變號一項]

【說例】

和直線 $x - 2y - 7 = 0$ 垂直且過 $(-2, -5)$ 的直線為 _____。

例 1

由下列各題所給予的條件求直線方程式：

- (1) 過 $(3, 2)$ 且斜率 $m = 5$ 。
- (2) 過 $(7, 8), (1, 3)$ 二點式。
- (3) x 軸截距 3， y 軸截距 -2 。
- (4) 斜率 $m = 3$ ， y 軸截距 2 。
- (5) 斜率 $m = 2$ ， x 軸截距 3 。

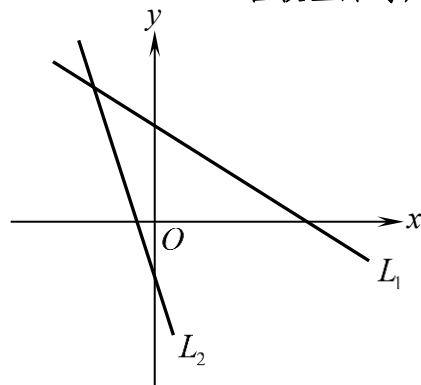
解

例 2

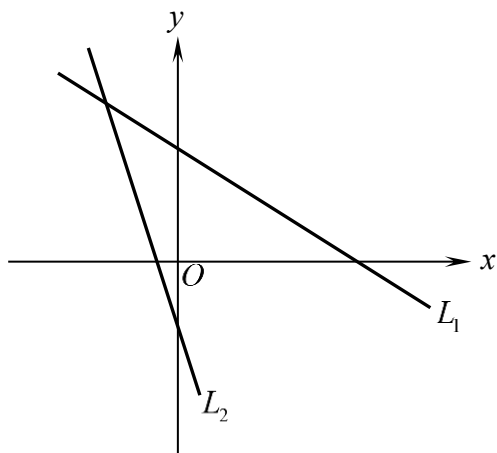
各校重點考題

如圖，兩直線 L_1, L_2 之方程式分別為 $L_1: y = ax + b$, $L_2: cx + dy + 1 = 0$ ；請選出正確的選項。

- (A) $a > 0$ (B) $b > 0$ (C) $c < 0$
 (D) $d < 0$ (E) $bd > 1$ 。



解



例 3 垂直假設法

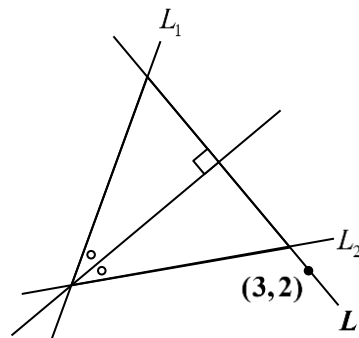
111 學測 A 類似

設坐標平面上兩直線 L_1, L_2 的斜率皆為正，且 L_1, L_2 有一夾角的平分線斜率為 $\frac{5}{4}$ 。另一直線 L 通過點 $(3, 2)$ 且與 L_1, L_2 所圍的有界區域為正三角形，試求 L 的方程式。

解

由於「正三角形的頂角平分線必垂直底邊」，

又夾角平分線的斜率為 $\frac{5}{4}$ ，故直線 L 的斜率為 $-\frac{4}{5}$ 。

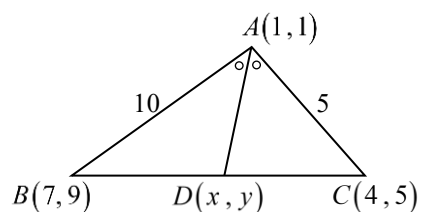


例 4

已知三角形的三頂點 $A(1, 1)$, $B(7, 9)$, $C(4, 5)$ ，又 $\angle BAC$ 的內角平分線與 $\overline{BC}$ 交於 D ，求直線 AD 的方程式。

解 1° $\overline{AB} = \sqrt{36+64} = 10$, $\overline{AC} = \sqrt{9+16} = 5$

2° $D: \begin{cases} x = \\ y = \end{cases}$



例 5 | 直線點斜式的應用

已知平面上有三點 $A(3, 3)$, $B(-1, -2)$, $C(4, 0)$ 及一直線 $L: kx - y - k + 4 = 0$ ，若直線 L 與 $\triangle ABC$ 相交，求 k 的範圍。

解

