

主題 1 平面直角坐標系

KKVD



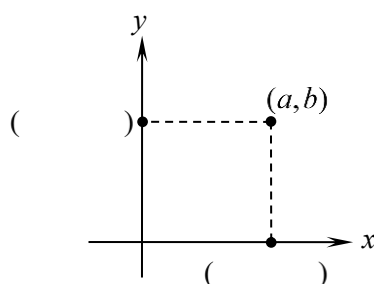
1. 對稱與投影

(1) 對坐標軸的投影：

點對於某直線的投影點又稱為_____。

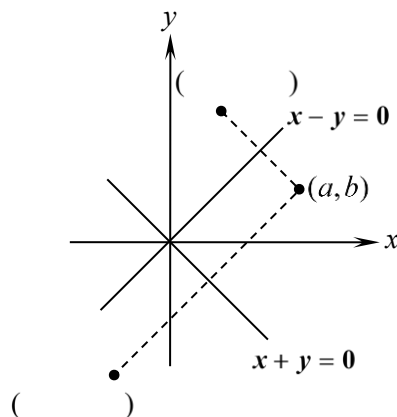
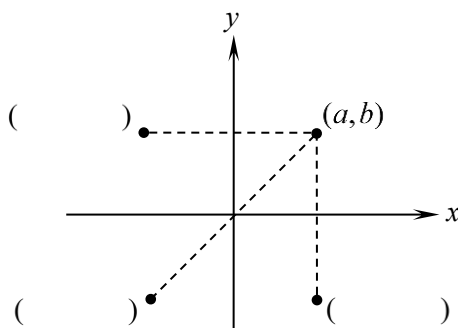
① $P(a, b)$ 對 x 軸的垂足為 $(a, 0)$ 。

② $P(a, b)$ 對 y 軸的垂足為 $(0, b)$ 。



(2) 五大基本對稱：

原坐標	對稱軸或對稱中心	對稱點坐標
(a, b)	x 軸 ($y = 0$)	$(a, -b)$
(a, b)	y 軸 ($x = 0$)	$(-a, b)$
(a, b)	原點	$(-a, -b)$
(a, b)	$x - y = 0$	(b, a)
(a, b)	$x + y = 0$	$(-b, -a)$



2. 平面上動點假設法

(1) 點在特殊直線上：

① 若點 P 在 x 軸上，可設 $P(t, 0), t \in \mathbb{R}$ 。

② 若點 P 在 y 軸上，可設 $P(0, t), t \in \mathbb{R}$ 。

③ 若點 P 在直線 $x - y = 0$ 上，可設 $P(\quad), t \in \mathbb{R}$ 。

(2) 點在任意直線上：

給定一直線 $L: ax + by + c = 0$ 及上一點 (x_0, y_0) ，則 L 上的動點參數式可寫成

$$(x, y) = (x_0 + bt, y_0 - at), t \in \mathbb{R}。$$

【說例 1】 直線方程式的係數有 1 時如何假設動點？

直線 $x + 2y - 7 = 0$ 上的動點可設為 $P(\quad), t \in \mathbb{R}$ 或

或 $P(\quad), t \in \mathbb{R}$ 。

【說例 2】 直線方程式的係數沒有 1 時如何假設動點？

以直線 $3x + 4y = 10$ 為例：

故直線 $3x + 4y = 10$ 上的動點可設為 $P(\quad), t \in \mathbb{R}$ 。

【說例 3】 直線方程式的係數沒有 1 時如何假設動點？

以直線 $3x - 2y = 5$ 為例：

故直線 $3x - 2y = 5$ 上的動點可設為 $P(\quad), t \in \mathbb{R}$ 。

(3) 由動點參數式反推直線：

若給定直線 L 上的動點參數式 $(x, y) = (x_0 + bt, y_0 + at)$, $t \in \mathbb{R}$ ，一般由消掉參數 t 可反求 x, y 的關係，即直線 L 的方程式。

【說例】已知直線上的動點參數式如何反求直線方程式？

已知平面上的動點坐標 $P: \begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = 3t - 1 \end{cases}$

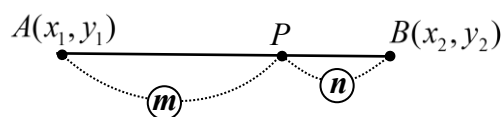
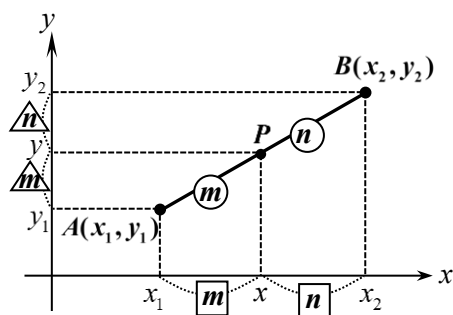
故動點 $P(2t + 3, 3t - 1)$ 恆在直線_____上。

(4) 格子點：

若 xy 平面上某個點的 x 坐標與 y 坐標皆為整數，我們稱之為_____。

3. 分點公式

(1) 內分點公式：

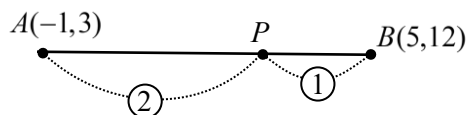


平面上有兩點 $A(x_1, y_1)$ 及 $B(x_2, y_2)$ ，且 P 在線段 $\overline{AB}$ 上， $\overline{AP}:\overline{PB} = m:n$ ， P 即為

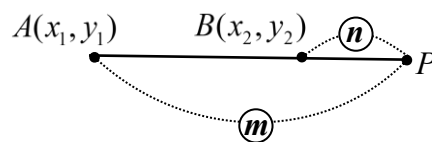
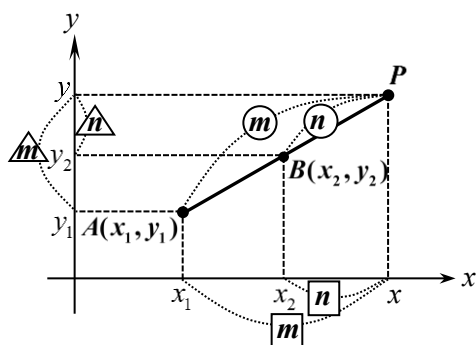
$\overline{AB}$ 的內分點，公式為：

$$P: \begin{cases} x = \frac{mx_2 + nx_1}{m + n} \\ y = \frac{my_2 + ny_1}{m + n} \end{cases}。$$

【說例】



(2) 外分點公式：

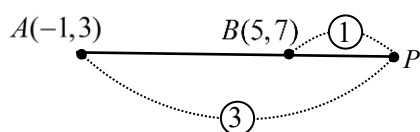


當平面上有兩點 $A(x_1, y_1)$ 及 $B(x_2, y_2)$ ，且 P 在線段 $\overline{AB}$ 外， $\overline{AP}:\overline{PB}=m:n (m > n)$ ，

P 即為 $\overline{AB}$ 的外分點，公式為：

$$P: \begin{cases} x = \frac{mx_2 - nx_1}{m - n} \\ y = \frac{my_2 - ny_1}{m - n} \end{cases}。$$

【說例】

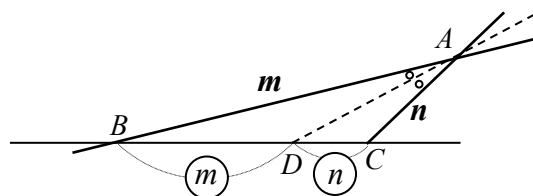


(3) 內角平分線的比例性質：

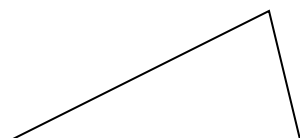
已知 $\overline{AD}$ 為 $\triangle ABC$ 中 $\angle A$ 之內角平分線且

D 在線段 $\overline{BC}$ 上，若 $\overline{AB}=m$, $\overline{AC}=n$ ，則

$$\overline{BD}:\overline{DC} = \overline{AB}:\overline{AC} = m:n。$$



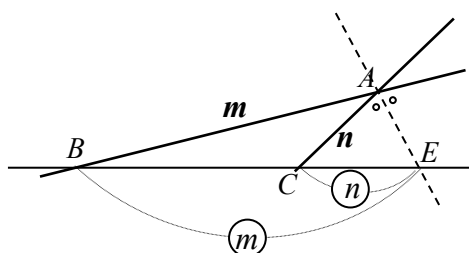
【說明】



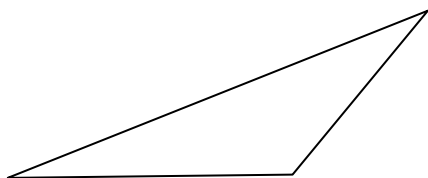
(4) 外角平分線的比例性質：

已知 $\overline{AE}$ 為 $\triangle ABC$ 中 $\angle A$ 之外角平分線且 E 在直線 BC 上，若 $\overline{AB} = m$, $\overline{AC} = n$ ，則

$$\overline{BE} : \overline{CE} = \overline{AB} : \overline{AC} = m : n。$$



【說明】

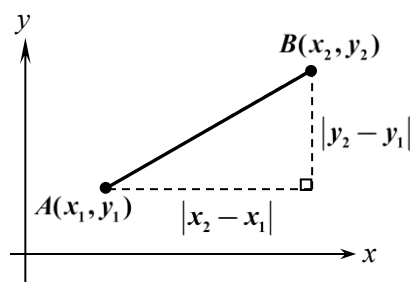


4. 平面坐標上的兩點距離公式

(1) 兩點距離公式：

若平面上有兩點 $A(x_1, y_1)$ 及 $B(x_2, y_2)$ ，則 A, B 兩點在平面上的距離為：

$$\overline{AB} = \sqrt{(\quad)^2 + (\quad)^2}。$$



(2) 兩點距離公式的代數結構：

若看見二次根號中有二次式，可嘗試是否可化為表示平面上兩點距離的結構。

① 函數 $f(x, y) = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}$ 可視為_____。

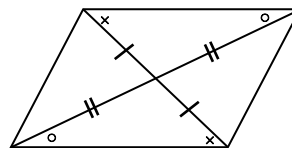
② $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 13} =$

可視為_____。

5. 平行四邊形

(1) 平行四邊形性質：

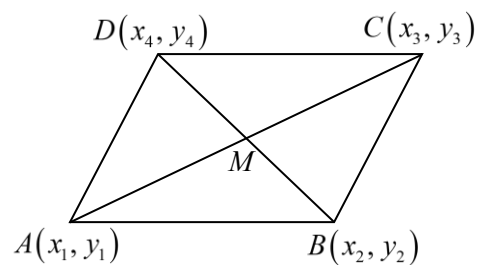
- ① 對邊互相平行。
- ② 對角線互相平分。



(2) 坐標公式：

已知平面坐標上的平行四邊形 $ABCD$ 四頂點坐標，如右圖。以下坐標關係恆成立：

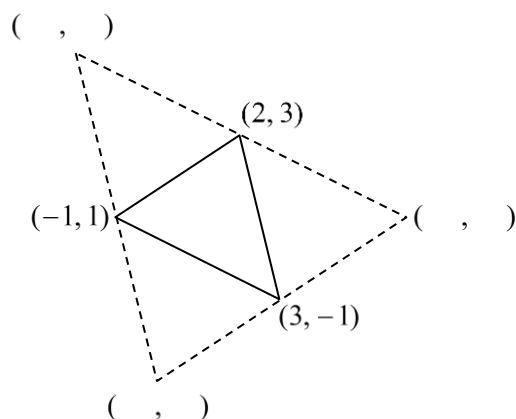
{



例 1

已知 $(-1, 1), (2, 3), (3, -1)$ 為平行四邊形三頂點，求第四點的坐標。

解



FDMV



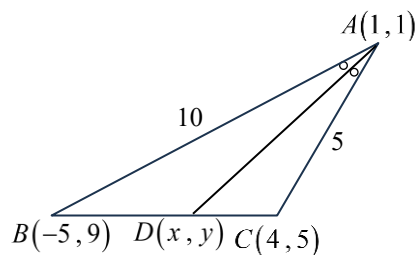
例 2

已知三角形的三頂點 $A(1, 1), B(-5, 9), C(4, 5)$ ， $\angle A$ 的內角平分線與 $\overline{BC}$ 交於 D ， $\angle A$ 的外角平分線與 $\overline{BC}$ 交於 E ，求 D, E 的坐標。

解

$$1^\circ \quad \overline{AB} = \sqrt{36+64} = 10, \overline{AC} = \sqrt{9+16} = 5$$

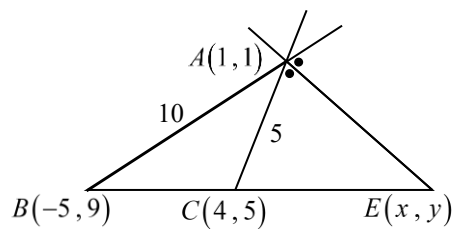
$$2^\circ \quad D: \begin{cases} x = \\ y = \end{cases}$$



EJYC

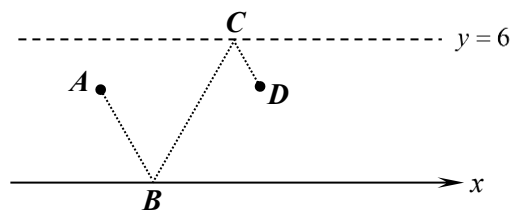


$$3^\circ \quad E: \begin{cases} x = \\ y = \end{cases}$$

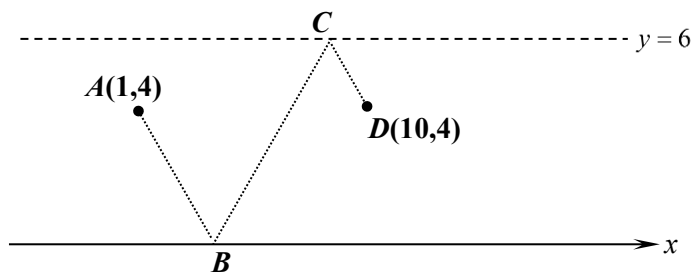


例 3

如右圖，小立在打撞球時，將球從 $A(1, 4)$ 撞至 x 軸上的 B 點，反彈後，球又碰到水平線 $y = 6$ 上的 C 點，再反彈後，球最後停在 $D(10, 4)$ 。試求 $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD}$ 。



解



小明玩戰爭網路遊戲，在螢幕上有一坐標平面，飛機 P 以等速直線前進，在坐標 $(-12, 4)$ 的位置被發現，經過 1 秒後到達坐標 $(-10, 4)$ ，再經 1 秒後，小明從原點選一方向發射一飛彈 R ，假設 R 也以直線前進且速率跟 P 相同，而且 R 剛好擊中 P 。試求 R 擊中 P 時的坐標 (a, b) 為_____。

解