

例 4

在坐標平面上 $A(7,5)$ 處有一光源，試求光源將圓 $x^2 + (y-1)^2 = 1$ 投射到 x 軸之影長。

解

1° 設過點 $(7, 5)$ 與 $x^2 + (y-1)^2 = 1$ 相切的直線方程式為

$$L: y-5 = m(x-7) \Rightarrow L: mx - y - 7m + 5 = 0$$

$$2^\circ \quad d((0,1), L) = 1 \Rightarrow \frac{|m \cdot 0 - 1 - 7m + 5|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 1$$

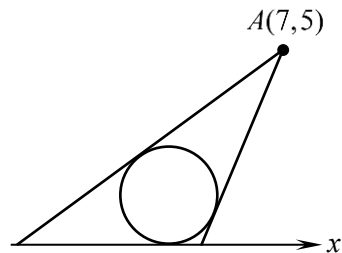
$$\Rightarrow 49m^2 - 56m + 16 = m^2 + 1 \Rightarrow (12m - 5)(4m - 3) = 0$$

$$\Rightarrow m = \frac{5}{12} \text{ 或 } \frac{3}{4}$$

3° 當 $m = \frac{5}{12}$ 時，切線方程式為 $5x - 12y + 25 = 0$ 與 x 軸交 $(-5, 0)$

當 $m = \frac{3}{4}$ 時，切線方程式為 $3x - 4y - 1 = 0$ 與 x 軸交 $(\frac{1}{3}, 0)$

$$\text{故投影長為 } \frac{1}{3} - (-5) = \frac{16}{3}$$



▣ [明道中學]

在坐標平面上點 $P(-1,4)$ 處有一光源，將圓 $C: x^2 + (y-2)^2 = 1$ 投射到 x 軸上的影子長為 _____。

$$\text{答：} \frac{16}{3}$$

▣ [高雄女中]

坐標平面上 $(6, 7)$ 處有一光源，將圓 $C: x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0$ 投射到 x 軸上，求其 x 軸的陰影長度為 _____。

$$\text{答：} \frac{28}{3}$$

▣ [北一女中]

已知三角形 ABC 中， $\overline{BC}$ 和 y 軸垂直。若點 A 坐標為 $(2,9)$ ，內切圓圓心為 $(1,1)$ 且半徑為 4 ，請問 $\overline{BC}$ 的長度為何？

$$\text{答：} 14$$