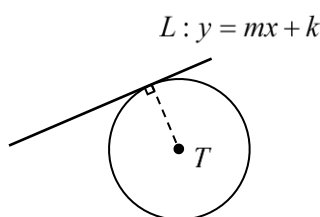


主題 16 圓的切線



1. 圓與切線的題型與處理

(1) 已知圓的切線 L 之斜率為 m :



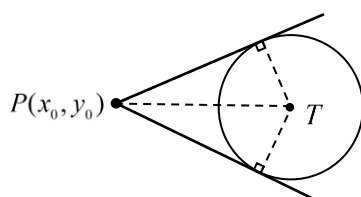
◎ 條件範例：已知圓 $C: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$ 的切線斜率為 3。

◎ 解法步驟：Step 1 可設 $L: y = 3x + k$ ，即 $L: 3x - y + k = 0$ 。

Step 2 由於相切，再利用 $d = r$ ，即 $\frac{|3(1) - (2) + k|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = 5$ 求出 k 。

◎ 重要觀念：同一斜率的切線必有兩條。

(2) 已知切線過圓外一點 $P(x_0, y_0)$:



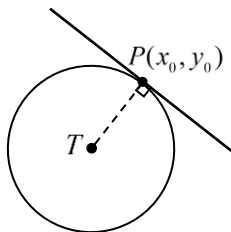
◎ 條件範例：已知圓 $C: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$ 外有一點為 $P(-3, -4)$ 。

◎ 解法步驟：Step 1 可設 $L: y + 4 = m(x + 3)$ ，即 $L: mx - y + 3m - 4 = 0$ 。

Step 2 由於相切，再利用 $d = r$ ，即 $\frac{|m(1) - (2) + 3m - 4|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 5$ 求出 m 。

◎ 重要觀念：由圓外一點作切線必有 2 條，故通常 m 有兩解；若 m 僅有一解，表示另一條切線必為鉛直線。

(3) 已知切線過圓上一點 $P(x_0, y_0)$:



◎ 條件範例：已知圓 $C: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 25$ 上有一點為 $P(4,5)$ 。

◎ 解法步驟：【法一】切線假設法

Step 1 可設 $L: y-5 = m(x-4)$ ，即 $L: mx - y - 4m + 5 = 0$ 。

Step 2 由於相切，再利用 $d = r$ 求出 m 。

【法二】圓上一點切線公式 (一般式平分法則)

Step 1 將圓化為一般式 $C: x^2 + y^2 - 2x - 2y - 23 = 0$ 。

Step 2 切線為

【法三】圓上一點切線公式 (心徑式平分法則)

Step 1 心徑式 $C: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 25$ 。

Step 2 切線為

【法四】利用法線求切線

Step 1 法線斜率為_____，

故切線斜率為_____。

Step 2 又切線過 $P(4,5)$ ，

方程式為

