

主題 14 圓幕與根軸

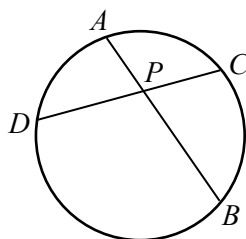
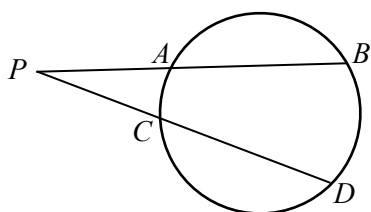


1. 圓幕定理

(1) 圓幕定理：

① 外幕：

若點 P 在圓外，由 P 對圓作一割線，交圓於 A, B 相異兩點，又由 P 對圓作另一割線，交圓於 C, D 相異兩點，則 。(如左下圖)



② 內幕：

若點 P 在圓內，過 P 的一弦兩端點為 A, B ，又過 P 的另一弦兩端點為 C, D ，則 。(如右上圖)

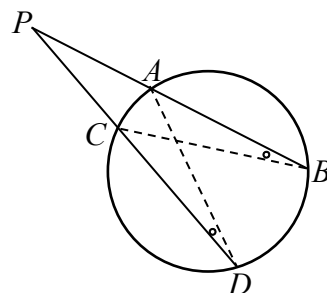
【證明】

$$1^\circ \quad \because \angle PDA = \angle PBC \quad [AC \text{ 劣弧的圓周角}]$$

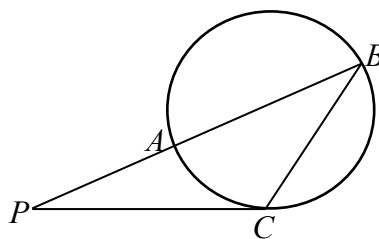
$$\therefore \triangle PDA \sim \triangle PBC$$

$$2^\circ \quad \overline{PD} : \overline{PA} = \overline{PB} : \overline{PC}$$

$$\Rightarrow \overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PC} \times \overline{PD}$$



(2) 切割線定理：



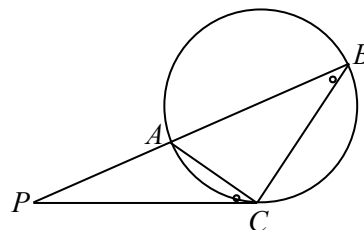
【證明】

1° $\because \angle PCA = \angle PBC$ [AC劣弧的圓周角]

$\therefore \triangle PCA \sim \triangle PBC$

2° $\overline{PC} : \overline{PA} = \overline{PB} : \overline{PC}$

$\Rightarrow \overline{PC}^2 = \overline{PA} \times \overline{PB}$

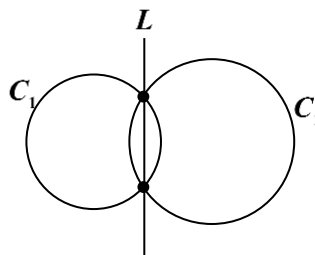
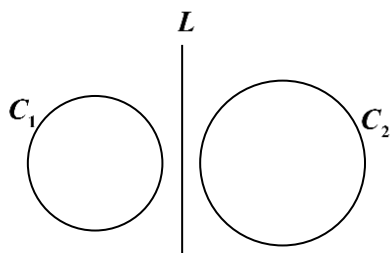


2. 等幂線

(1) 等幂線的定義：

到兩不同心圓 $C_1: x^2 + y^2 + d_1x + e_1y + f_1 = 0$ 與 $C_2: x^2 + y^2 + d_2x + e_2y + f_2 = 0$ 的

切線段等長之所有點軌跡所在之直線稱為 ，或等幂線 (等幂軸)。



(2) 根軸求法：

根軸所在的直線方程式為

$$\boxed{L: (x^2 + y^2 + d_1x + e_1y + f_1) - (x^2 + y^2 + d_2x + e_2y + f_2) = 0} \quad \text{[兩圓方程式相減]}$$

或 $\boxed{L: (d_1 - d_2)x + (e_1 - e_2)y + (f_1 - f_2) = 0}$ 。

【說明】

$P(x, y)$ 到圓 C_1 和圓 C_2 的切線段等長

$$\text{故 } \sqrt{x^2 + y^2 + d_1x + e_1y + f_1} = \sqrt{x^2 + y^2 + d_2x + e_2y + f_2}$$

$$\Rightarrow \boxed{L: (d_1 - d_2)x + (e_1 - e_2)y + (f_1 - f_2) = 0}$$

